



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática

## Transformada de Fourier e Aplicações

**Autor:** Valci Rodrigues Balbino Junior

**Orientador:** Prof. Dr. Waldeck Schützer

**Disciplina:** Trabalho de Graduação B

**Profs. Responsáveis:** Dr. Artur Darezzo Filho  
Dra. Margarete Tereza Zanon Baptistini

São Carlos, 28 de novembro de 2006.

# Transformada de Fourier e Aplicações

**Autor:** Valci Rodrigues Balbino Junior

**Orientador:** Prof. Dr. Waldeck Schützer

**Disciplina:** Trabalho de Graduação B

**Profs Responsáveis:** Dr. Artur Darezzo Filho  
Dra. Margarete Tereza Zanon Baptistini

São Carlos, 28 de novembro de 2006.

*“ Para se conhecer a sabedoria e a instrução;  
para se entenderem, as palavras da prudên-  
cia.*

*Para se receber a instrução do entendi-  
mento, a justiça, o juízo e a equidade;*

*Para dar aos simples prudência, e aos  
moços, conhecimento e bom siso;*

*O sábio ouvirá e crescerá em conhecimento,  
e o entendido adquirirá sábios conselhos.”*

Bíblia: Provérbios 1:2-5

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus pela vida.

Ao meu orientador, Dr. Waldeck Schützer, pelo incentivo e ajuda.

À minha família e à minha namorada pelo apoio nas horas difíceis.

Aos coordenadores da disciplina, Dr. Artur Darezzo Filho e Dra. Margarete T. Z. Baptistini, pelo bom andamento da disciplina.

E não poderia esquecer de agradecer aos meus amigos do Bloco 31 e à minha turma (matemática 2003).

# Resumo

Neste trabalho estudaremos a série e a transformada de Fourier, assim como as Transformadas Discretas de Fourier - DFT e as Transformadas Rápidas de Fourier - FFT, além de suas aplicações, mais especificamente as aplicações voltadas ao processamento digital de imagem.

Abordará aspectos históricos, assim como as motivações que levaram Jean Baptiste Fourier que o direcionou a elaborar essa nova teoria. O interesse no estudo da condução térmica levou Fourier a inovadora resolução da equação do calor, originando-se assim esse novo conceito.

No capítulo 1, iniciamos com série de Fourier de forma minuciosa e precisa, sendo exibida sua idéia inicial até seus critérios de convergência. Para funções periódicas pares e ímpares explicitamos formas simplificadas de série de Fourier conhecida como série do cosseno de Fourier e série do seno de Fourier.

No capítulo 2, estudamos a transformada de Fourier - FT e a transformada inversa de Fourier - IFT. São apresentados em forma de teoremas as principais propriedades das transformadas e uma breve introdução do teorema da convolução.

No capítulo 3, introduzimos o conceito de transformada discreta de Fourier - DFT que possui propriedades importantes para as transformadas bidimensionais.

No capítulo 4, dedicamos ao entendimento do algoritmo da transformada rápida de Fourier - FFT, que se resume numa diminuição do custo computacional da FT.

No capítulo 5, empenhamos nas aplicações. A resolução da equação do calor foi a motivação que originou essa teoria. Mas evidentemente, a FFT é utilizada numa variedade de aplicações em varias áreas. Essa teoria tem aplicações em radar, comunicações, sonar e processamento de sinal, inclusive atualmente é utilizada em biomedicina, espectroscopia, música, geofísica, análises metalúrgicos e análises de sistemas.

No capítulo 6, exibimos alguns aspectos do processamento de

imagens. Em especial tratamos dos fundamentos do processamento, dos espectros de Fourier, filtro passa-baixas (FPB) e filtro passa-altas (FPA).

Portanto, pela imensa área de atuação e relevância para a sociedade nos dias atuais, devemos mostrar motivação pelo estudo da teoria de Fourier.

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>1 Aspectos básicos das Séries de Fourier</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Definição de Série de Fourier . . . . .	1
1.2 Séries de Fourier para funções Reais . . . . .	5
1.3 Convergência Pontual de Séries de Fourier . . . . .	7
1.4 Aspectos de Convergência das Séries de Fourier . . . . .	8
1.5 Séries do Seno e Cosseno de Fourier . . . . .	9
1.6 Convergência da Série do Seno e Cosseno de Fourier . . . . .	13
<b>2 A transformada de Fourier</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1 Introdução às transformadas de Fourier . . . . .	15
2.2 Propriedades . . . . .	16
2.3 Transformada Inversa . . . . .	18
2.4 Transformada de Fourier para sinais bidimensionais contínuos . . . . .	18
2.5 Uma introdução a Convolução . . . . .	19
<b>3 A Transformada Discreta de Fourier (DFT)</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1 Considerações . . . . .	20
3.2 Dedução da DFT . . . . .	20
3.3 Propriedades básicas da DFT . . . . .	21
<b>4 A Transformada Rápida de Fourier (FFT)</b> . . . . .	<b>23</b>
4.1 Definição da FFT . . . . .	23
4.2 O esquema de inversão de bits . . . . .	24
4.3 Rotações na FFTs . . . . .	26
4.4 Calculando Senos e Tangentes . . . . .	28
4.5 Calculando duas FFTs reais simultaneamente . . . . .	30

---

<b>5</b>	<b>Algumas Aplicações . . . . .</b>	<b>32</b>
5.1	Equação do calor . . . . .	32
5.2	Filtros usados no processamento de sinais . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Processamento de Imagem . . . . .</b>	<b>36</b>
6.1	Introdução . . . . .	36
6.2	Matriz imagem . . . . .	36
6.3	Filtro passa-baixas (FPB) . . . . .	38
6.4	Filtro passa-altas (FPA) . . . . .	39
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>41</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>42</b>



# Lista de Figuras

1.1	função periódica com $v = 9$ . . . . .	2
1.2	aproximação com 1 harmônica. . . . .	4
1.3	aproximação com 2 harmônicas. . . . .	4
1.4	aproximação com 4 harmônicas. . . . .	5
1.5	aproximação com 8 harmônicas. . . . .	5
1.6	Função $f(x)$ seccionalmente contínua. . . . .	7
1.7	Exemplo de função par $\cos(x)$ . . . . .	10
1.8	Exemplo de função impar $\sin(x)$ . . . . .	10
1.9	$f(x) =  x $ par $g(x) = x^2$ par $h(x) = f(x)g(x)$ par . . . . .	11
1.10	$f(x) = \sin(x)$ impar $g(x) = x$ impar $h(x) = f(x)g(x)$ par . . . . .	11
1.11	$f(x) = x$ impar $g(x) = x^2$ par $h(x) = f(x)g(x)$ impar . . . . .	11
2.1	Função $f(x, y)$ . . . . .	18
2.2	Domínio de frequência em perspectiva tridimensional. . . . .	18
2.3	Domínio de frequência como função de intensidade . . . . .	19
5.1	Função com 5, 6 e 7 harmônicas. . . . .	35
6.1	Imagens em branco e preto das matrizes $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	37
6.2	Imagem da placa DM como $F(u, v)$ . . . . .	38
6.3	Espectro de Fourier. . . . .	38
6.4	Imagem Borrada com frequência de corte maior. . . . .	39
6.5	Imagem Borrada com frequência de corte menor. . . . .	39
6.6	Imagem original Departamento de Matemática. . . . .	39
6.7	Imagem Borrada com FPB. . . . .	39
6.8	Imagem com as bordas realçadas. . . . .	40
6.9	Imagem com mais realce. . . . .	40

# Lista de Tabelas

4.1	Reordenação Usando a Inversão de Bits. . . . .	26
6.1	Tipo de informação da Imagem. . . . .	38

# Introdução

O matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) apresentou em 1822 sua obra 'Theorie analytique de la Chaleur' (Teoria analítica do calor), onde apresenta uma nova teoria matemática sobre o problema da condução térmica. Desde o século XVII, com o desenvolvimento de novas ferramentas como o cálculo diferencial, físicos e matemáticos conseguiram descrever inúmeros fenômenos por meio das equações diferenciais. Entretanto, resolvê-las mostrou-se um trabalho extremamente difícil.

Fourier não apenas apresenta uma nova solução para a equação do calor ( $u_t = ku_{xx}$ ) isoladamente, mas apresenta também uma forma excepcional para resolver inúmeras equações diferenciais parciais. O fato de podermos fazer aproximações de funções por séries é evidentemente útil, até mesmo porque muitas vezes nem chegamos a conhecer a função em sua forma analítica.

Mas quais as diferenças fundamentais entre as séries de potências e as séries de Fourier? Se estivermos interessados em aproximações, por que as séries de potências não podem desempenhar o papel das séries de Fourier?

Existem várias diferenças entre estas duas séries. A série de Taylor nos dá uma aproximação muito boa de uma função numa vizinhança de um ponto. Porém, a função em questão deve obedecer algumas restrições como ser suave, no sentido que podemos derivá-la até uma certa ordem. Além disso, esta aproximação é local, e não global como no caso das séries de Fourier. Além disso, a série de Taylor não serve para obtermos uma aproximação da integral de uma função, integrando termo a termo da série. Para funções periódicas a série de Fourier é muito mais adequada para aproximarmos uma função.

O objetivo perseguido neste trabalho é realizar processo básico de processamento de imagens usando a transformada de Fourier. Mas cabe iniciarmos nossos trabalhos com uma compreensão íntima das séries, e um entendimento tanto da forma geral como da discretização das transformadas.

Esta busca pela aplicação diz respeito às séries e as transformadas. Nestes problemas, de um modo geral, é considerada a transformada rápida de

Fourier (FFT) que torna mais pratica a implementação.

# Capítulo 1

## Aspectos básicos das Séries de Fourier

### 1.1 Definição de Série de Fourier

Para entendermos a definição de Séries de Fourier temos que começar com uma idéia essencial: representaremos uma *função periódica*<sup>1</sup> em termos de *frequência*<sup>2</sup> em função do tempo.

Consideremos a função periódica descrita pela função  $4 \cos 2\pi vx$ , com frequência igual a  $v$ . Podemos então escrever a função como uma *função exponencial complexa*<sup>3</sup>:

$$4 \cos 2\phi vx = 2e^{i2\phi vx} + 2e^{-i2\phi vx}$$

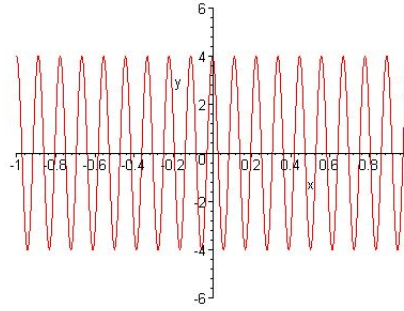
Portanto nessa forma visualizamos que a amplitude é 4 e a frequência é  $v$  e  $-v$ .

---

<sup>1</sup>Função Periódica:  $f(t) = f(t+T)$ , se existe  $T$  real positivo, denominado período fundamental

<sup>2</sup>Frequência ( $f$ ):  $f = \frac{1}{T}$

<sup>3</sup>Identidade de Euler:  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sen \phi$

FIGURA 1.1: função periódica com  $v = 9$ **Teorema 1.1. Ortogonalidade de exponencial complexa**

Para quaisquer inteiros  $m$  e  $n$ , a exponencial complexa ( $e^{i2\pi nx/P}$ ) com período  $P$  satisfaz a relação de ortogonalidade

$$\frac{1}{P} \int_0^P e^{i2\pi mx/P} e^{-i2\pi nx/P} dx = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ 1, & \text{para } m = n \end{cases}$$

**Demonstração**

Provaremos o teorema para o caso  $P = 2\pi$ . Então para este caso teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(m-n)x dx \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se  $m \neq n$ , então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx = \frac{\text{sen}(m-n)x}{2\pi(m-n)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(m-n)x dx = \frac{-\cos(m-n)x}{2\pi(m-n)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Portanto, a equação (1.1) é igual a 0 quando  $m \neq n$ .

Se  $m = n$ , então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1$$

Portanto, a equação (1.1) é igual a 1 quando  $m = n$ .

Assim provamos o teorema  $\square$ .

Então, consideremos uma função periódica  $g(x)$ , com período  $P$ , e expressaremos essa função em forma de série exponencial complexa. Obteremos o seguinte resultado:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/P}$$

Portanto, agora demonstraremos a forma geral do coeficiente  $C_n$  que pode ser obtida a partir do Teorema da Ortogonalidade. Basta multiplicar por  $\frac{1}{P}e^{-i2\pi nx/P}$  e integrar ambos os termos da equação.

$$\frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi nx/P} dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \frac{1}{P} \int_0^P e^{i2\pi mx/P} e^{-i2\pi nx/P} dx = C_n$$

Ou seja, no somatório

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \frac{1}{P} \int_0^P e^{i2\pi mx/P} e^{-i2\pi nx/P} dx$$

pelo Teorema da Ortogonalidade, só não zera o termo em que  $m \neq n$ .

Neste caso  $\frac{1}{P} \int_0^P e^{i2\pi mx/P} e^{-i2\pi nx/P} dx = 1$  e nos demais casos igualam-se os termos a zero.

**Definição 1.1.** *Se a função  $g(x)$  tem período  $P$ , então os coeficientes de Fourier  $C_n$  para  $g(x)$  são definidos como:*

$$C_n = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi nx/P} dx$$

Usando esse coeficiente  $C_n$ , a **Série de Fourier** é definida como:

$$g(x) \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i2\pi mx/P}$$

A idéia básica, no caso geral, de séries de Fourier é representar uma função periódica em termos de soma de exponenciais complexas para qualquer período. Entretanto, para o caso de função real e  $P = 2\pi$  consideremos  $f(x) = f(x + 2\pi)$  uma função integrável sobre o intervalo  $[-\pi, \pi]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A série de Fourier de  $f(x)$  é a série trigonométrica (demonstraremos na seção 1.2):

$$f(x) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)]$$

onde Coeficientes de Fourier  $A_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$ :

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Porém neste trabalho adotaremos a forma complexa (caso geral já definido) que para nossos propósitos, processamento de imagem, é mais conveniente. Então, independentemente do domínio da função usaremos a equação da definição 1.1:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/P}$$

onde Coeficiente de Fourier  $C_n$ :

$$C_n = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) e^{i2\pi nx/P} dx$$

com período  $P$ .

**Exemplo:** Um exemplo de aproximação de função por série de Fourier é a aproximação da função identidade  $g(x) = x$ , com período  $2\pi$ .

$$\text{Efetuado os cálculos obteremos: } S_m(x) = \sum_{n=1}^M \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

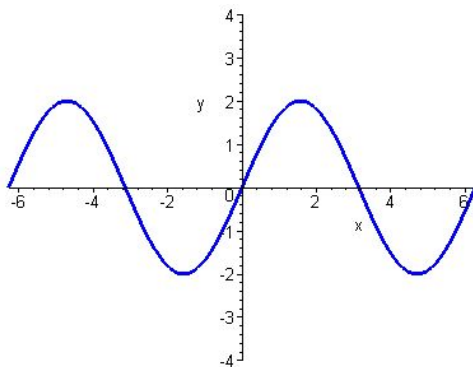


FIGURA 1.2: aproximação com 1 harmônica.

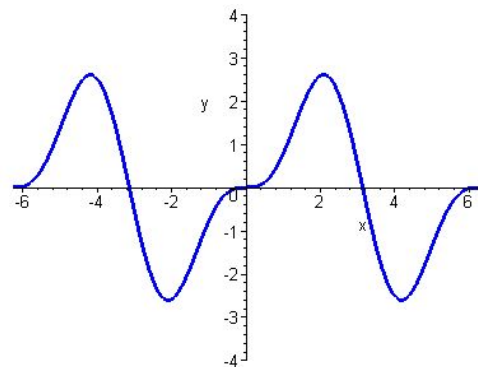


FIGURA 1.3: aproximação com 2 harmônicas.



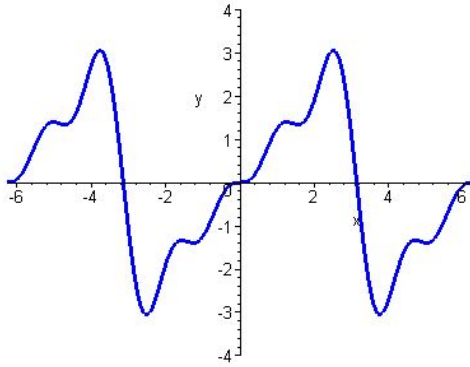


FIGURA 1.4: aproximação com 4 harmônicas.

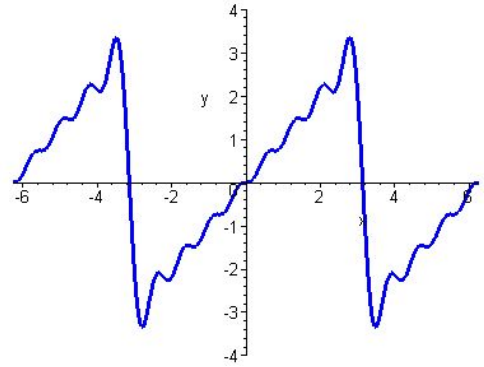


FIGURA 1.5: aproximação com 8 harmônicas.

## 1.2 Séries de Fourier para funções Reais

A série de Fourier como vimos pode ser definida<sup>4</sup> para valores reais em função de seno e cosseno. Para demonstrar devemos partir do caso geral (série exponencial complexa) e assumir  $g(x)$  como uma função de valores reais.

Então os coeficientes de Fourier para  $g(x)$  no intervalo  $[0, P]$  é igual:

$$C_n = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi nx/P} dx$$

Mas, modificando o índice  $n$  de  $C_n$  para  $-n$  de  $C_{-n}$  vale a igualdade:

$$C_n^* = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi nx/P} dx$$

$$C_{-n} = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{i2\pi nx/P} dx$$

Portanto  $g(x)$  para valores reais:

$$C_n^* = C_{-n} \quad (1.2)$$

Usando a equação (2) na série de Fourier  $g(x)$  para valores reais:

$$\begin{aligned} g(x) &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/P} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/P} + C_{-n} e^{-i2\pi nx/P} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/P} + (C_n e^{i2\pi nx/P}) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(C_n e^{i2\pi nx/P}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

<sup>4</sup>Série à valores reais: Função com domínio real.

Onde  $\text{Re}$  é a parte real do número complexo. Então:

$$g(x) \approx C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\text{Re}(C_n e^{i2\pi nx/P})$$

Escrevendo os coeficientes na forma complexa:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi nx/P} dx \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P \left( g(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx \right) - \frac{i}{P} \int_0^P \left( g(x) \text{sen} \frac{2\pi nx}{P} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} A_n - \frac{i}{2} B_n \end{aligned}$$

Definimos assim  $A_n$  e  $B_n$ :

$$A_n = \frac{2}{P} \int_0^P \left( g(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx \right)$$

$$B_n = \frac{2}{P} \int_0^P \left( g(x) \text{sen} \frac{2\pi nx}{P} dx \right)$$

Usando  $C_n$  em função de  $A_n$  e  $B_n$ :

$$C_n = \frac{1}{2} A_n - \frac{i}{2} B_n.$$

e a identidade de Euler:

$$e^{i2\pi nx/P} = \cos(2\pi nx/P) + i \text{sen}(2\pi nx/P).$$

Obtemos:

$$g(x) \approx C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{2\pi nx}{P} + B_n \text{sen} \frac{2\pi nx}{P} \right\}$$

Como:

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{\frac{2}{P} \int_0^P g(x) \cos \frac{2\pi 0x}{P} dx}{2} = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) dx \quad e$$

$$C_0 = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi 0x/P} dx = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) dx ,$$

Então temos:  $\frac{1}{2} A_0 = C_0$ .

Concluimos que:

$$g(x) \approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + B_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{p} \right\}$$

$$A_n = \frac{2}{P} \int_0^P \left( g(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_n = \frac{2}{P} \int_0^P \left( g(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{P} dx \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

### 1.3 Convergência Pontual de Séries de Fourier

**Definição 1.2.** Dizemos que uma função  $f(x)$  definida em um intervalo finito  $[a, b]$  é uma **função seccionalmente contínua** em  $[a, b]$  se o intervalo puder ser subdividido em um número finito de subintervalos com  $f(x)$  contínua. Se  $f(x)$  é seccionalmente contínua em todos os intervalos então  $f(x)$  é seccionalmente contínua.

**Exemplo 1.2:** A função  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } [\frac{1}{2}, 2] \\ -1 & \text{se } [-1, \frac{1}{2}) \end{cases}$  é uma função seccionalmente contínua.

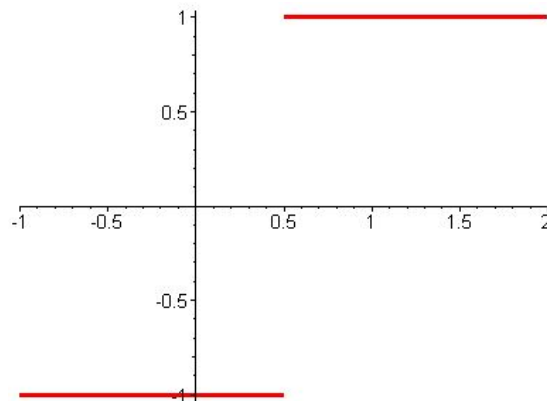


FIGURA 1.6: Função  $f(x)$  seccionalmente contínua.

Ou seja, uma função  $f(x)$  seccionalmente contínua sobre  $\mathbb{R}$  é uma função que restrita a cada intervalo limitado  $I \subset \mathbb{R}$ , possui no máximo um número finito de descontinuidades de salto <sup>5</sup> finito. Os limites laterais de  $f(x)$  à esquerda e à direita nos pontos de descontinuidade de salto finito  $p_j (j = 1, 2, 3, \dots)$  são indicados, respectivamente, por:

$$f(p_{j-}) = \lim_{x \rightarrow p_{j-}} f(x) \quad f(p_{j+}) = \lim_{x \rightarrow p_{j+}} f(x)$$

<sup>5</sup>salto de  $f$  em  $p$ :  $\text{salto}(f)(p) = f(p_+) - f(p_-)$  onde  $f(p_+)$  e  $f(p_-)$  são respectivamente os limites laterais à direita e à esquerda em  $x = p$

**Teorema 1.2.** *Seja uma função  $f(x)$  seccionalmente contínua no período  $P$ . Se cada ponto de  $f(x)$  tiver derivada à direita e à esquerda, então a série de Fourier converge para o ponto médio.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/p} = \frac{1}{2}[g(x+) + g(x-)]$$

Se  $f(x)$  é contínua então:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/p} = f(x)$$

## 1.4 Aspectos de Convergência das Séries de Fourier

**Teorema 1.3.** *Se  $g(x)$  é uma função contínua com período  $P$  e a derivada  $g'(x)$  é seccionalmente contínua, então a soma parcial da série de Fourier de  $g(x)$  converge uniformemente para  $g(x)$ , isto é,*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - S_M(x)| \right\} = 0$$

Ou seja, o teorema diz que quando  $M \rightarrow \infty$  a diferença tende a 0.

**Teorema 1.4.** *Se  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|$  convergir, então a série de Fourier  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx}$  converge uniformemente para a função contínua  $g(x)$  com período  $P$ .*

**Definição 1.3.** *A função  $g(x)$  é chamada de **Lipschitz à direita** de  $x$  se para alguma constante positiva  $\mathcal{A}$ ,  $\alpha$  e  $\delta$ , temos:*

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \mathcal{A} h^\alpha, \quad \text{para } 0 < h < \delta.$$

*Analogamente,  $g(x)$  é chamada de **Lipschitz à esquerda** de  $x$  se para alguma constante positiva  $\mathcal{B}$ ,  $\beta$  e  $\epsilon$ , temos:*

$$|g(x-h) - g(x-)| \leq \mathcal{B} h^\beta, \quad \text{para } 0 < h < \epsilon.$$

**Teorema 1.5.** *Seja  $g(x)$  uma função seccionalmente contínua com período  $P$ . No ponto  $x$  em que é Lipschitz à esquerda e à direita,*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/p} = \frac{1}{2} [g(x+) + g(x-)]$$

*Se  $x$  é um ponto de continuidade de  $g(x)$ , então simplificando.*

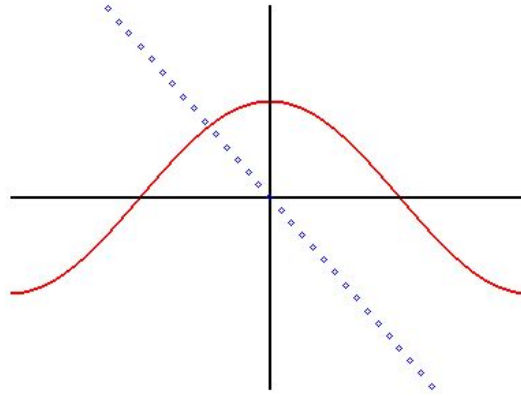
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/P} = g(x)$$

## 1.5 Séries do Seno e Cosseno de Fourier

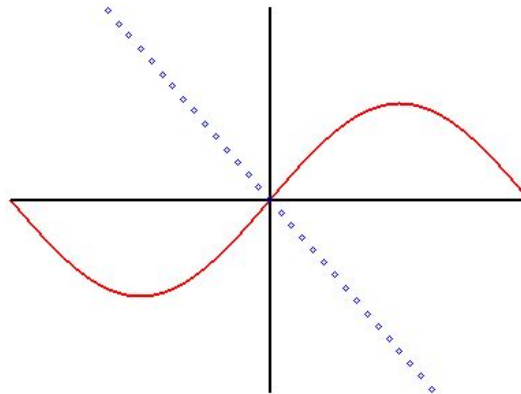
Série do Seno e Cosseno de Fourier são formas especiais de série de Fourier para funções simétricas pares e ímpares. Ou seja, as funções que satisfazerem certas propriedades (par ou ímpar) têm uma forma geral simplificada de série de Fourier, e este fato ocorre porque tais funções podem ser arrançadas. Note que a integral de uma função ímpar, definida num intervalo múltiplo do período desta, iguala a zero. E que a integral da função par, definida num intervalo múltiplo do período desta, pode modificar os limites de integração.

**Definição 1.4.** *Uma função  $f(x)$  é chamada par se no intervalo  $[-P, P]$  ocorre  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in [-P, P]$ . Uma função  $f(x)$  é chamada ímpar se no intervalo  $[-P, P]$  ocorre  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in [-P, P]$ .*

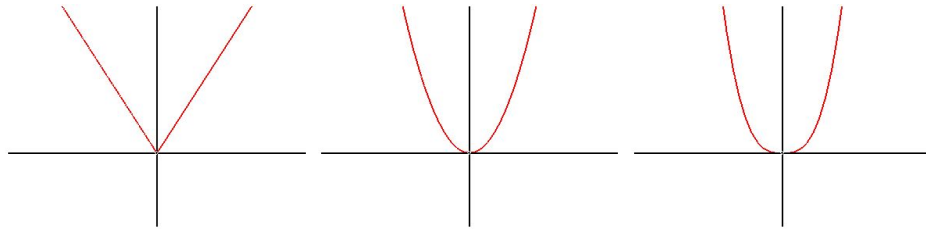
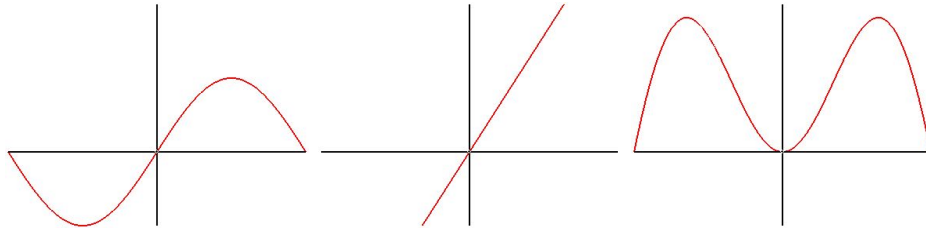
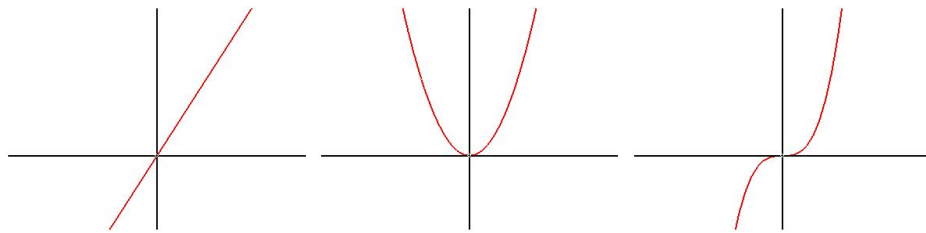
Uma função  $f(x)$  periódica possui simetria par se para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-t) = f(t)$ . Ou seja, as funções pares são simétricas em relação ao eixo das ordenadas (vertical)  $x = 0$ .

FIGURA 1.7: Exemplo de função par  $\cos(x)$ 

Simetria ímpar para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$ . As funções ímpares são simétricas em relação à reta  $y = -x$  que passa pela origem  $(0, 0)$ .

FIGURA 1.8: Exemplo de função ímpar  $\sin(x)$ 

O produto de duas funções ímpares ou o produto de duas funções pares resulta em uma função par, e o produto de uma função ímpar por uma função par é uma função ímpar.

FIGURA 1.9:  $f(x) = |x|$  par       $g(x) = x^2$  par       $h(x) = f(x)g(x)$  parFIGURA 1.10:  $f(x) = \text{sen}(x)$  ímpar       $g(x) = x$  ímpar       $h(x) = f(x)g(x)$  parFIGURA 1.11:  $f(x) = x$  ímpar       $g(x) = x^2$  par       $h(x) = f(x)g(x)$  ímpar

Então, para  $g(x)$  igual a uma função ímpar no intervalo  $[-P, P]$

$$\int_{-P}^P g(x) dx = 0$$

e, quando  $g(x)$  é uma função par no intervalo  $[-P, P]$

$$\int_{-P}^P g(x) dx = 2 \int_0^P g(x) dx$$

Agora, calculando a série de Fourier de uma função ímpar  $g(x)$  no intervalo  $[-P, P]$ :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2P} \int_{-P}^P g(x) e^{-i2\pi nx/(2P)} dx \\ &= \frac{1}{2P} \int_{-P}^P g(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx - \frac{i}{2P} \int_{-P}^P g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{P} dx \end{aligned}$$

Simplificando, se  $g(x)$  é ímpar então  $g(x) \cos \frac{n\pi x}{P}$  também é ímpar, resultando

$$\int_{-P}^P g(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx = 0$$

e,  $g(x) \sen \frac{n\pi x}{P}$  é par, portanto

$$\int_{-P}^P g(x) \sen \frac{n\pi x}{P} dx = 2 \int_0^P g(x) \sen \frac{n\pi x}{P} dx$$

Portanto, substituindo os resultados obtidos no cálculo de  $C_n$  teremos:

$$C_n = \frac{-i}{P} \int_0^P g(x) \sen \frac{n\pi x}{P} dx$$

Como  $C_0 = 0$  e  $-C_n = C_{-n}$  concluímos que:

$$\begin{aligned} g(x) &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/2p} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\pi nx/p} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-i\pi nx/p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \{e^{i\pi nx/p} - e^{-i\pi nx/p}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2iC_n) \sen \frac{n\pi x}{P} \end{aligned}$$

Agora definiremos  $B_n = 2iC_n$ , e reescreveremos

$$g(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sen \frac{n\pi x}{P}$$

e

$$B_n = \frac{2}{P} \int_0^P g(x) \sen \frac{n\pi x}{P} dx$$

Finalmente definiremos a série do Seno de Fourier.

**Definição 1.5.** Se  $g(x)$  é uma função definida num intervalo  $[0, P]$ , então a série do Seno de Fourier é definida como:

$$g(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sen \frac{n\pi x}{P} \quad B_n = \frac{2}{P} \int_0^P g(x) \sen \frac{n\pi x}{P} dx$$



Agora supondo  $g(x)$  par no intervalo  $[-P, P]$ . Podemos escrever a série como série de cosseno. Começamos considerando  $C_n$ :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2P} \int_{-P}^P g(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx - \frac{i}{2P} \int_{-P}^P g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{P} dx \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P g(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx \end{aligned}$$

Como  $C_{-n} = C_n$  então:

$$\begin{aligned} g(x) &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nx/2p} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \{e^{i\pi nx/p} + e^{-i\pi nx/p}\} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2C_n \cos \frac{n\pi x}{P} \end{aligned}$$

Agora definiremos  $A_n = 2C_n$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e reescreveremos

$$g(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{P}$$

e

$$A_n = \frac{2}{P} \int_0^P g(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx$$

Note que os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  são muito parecidos. Então definimos formalmente a série de Cosseno de Fourier.

**Definição 1.6.** Se  $g(x)$  é uma função definida num intervalo  $[0, P]$ , então a série do Cosseno de Fourier é definida como:

$$g(x) \approx \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{P} \quad A_n = \frac{2}{P} \int_0^P g(x) \cos \frac{n\pi x}{P} dx$$

## 1.6 Convergência da Série do Seno e Cosseno de Fourier

A convergência da série do Seno e Cosseno de Fourier pode ser deduzida da convergência pontual da série de Fourier.

**Teorema 1.6. Convergência pontual da Série do Seno de Fourier**

Seja  $g(x)$  uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[0, P]$ . E no ponto  $0$  e  $P$  o seno da série  $g(x)$  iguala à  $0$ . Para  $0 < x < P$  temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{P} = \frac{1}{2}[g(x+) + g(x-)]$$

desde que no ponto  $x$  seja  $g(x)$  Lipschitz à esquerda e à direita ( $g(x)$  possuir derivadas à esquerda e à direita).

E para o caso em que  $x$  é ponto de continuidade de  $g(x)$ , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{P} = g(x)$$

desde que  $g(x)$  seja Lipschitz à esquerda e à direita de  $x$ .

**Teorema 1.7. Convergência pontual da Série do Cosseno de Fourier**

Seja  $g(x)$  uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[0, P]$ . No ponto  $0$  a série do Cosseno de Fourier converge para  $g(0+)$ , sendo  $g(x)$  Lipschitz à direita do  $0$ . E no ponto  $P$  a série do Cosseno de Fourier converge para  $g(P-)$ , sendo  $g(x)$  Lipschitz à esquerda de  $P$ . Para  $0 < x < P$ , temos

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{P} = \frac{1}{2}[g(x+) + g(x-)]$$

desde que  $g(x)$  seja Lipschitz à esquerda e à direita de  $x$ .

## Capítulo 2

# A transformada de Fourier

### 2.1 Introdução às transformadas de Fourier

Neste capítulo estudaremos a transformada de Fourier. Então, para tal usaremos algumas definições:

**Definição 2.1.** *Durante este trabalho usaremos a notação  $\|f\|_1$  definida como:*

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$$

Se a integral acima converge, então podemos dizer que  $\|f\|_1$  é finito e a integral converge para este valor (se a integral diverge, então dizemos que  $\|f\|_1 = \infty$ ). Analogamente definimos  $\|f\|_2$ .

**Definição 2.2.** *Definiremos  $\|f\|_2$  como:*

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Se esta segunda integral converge, então dizemos que  $\|f\|_2$  é finito e a integral converge para  $\|f\|_2^2$  (se a integral diverge, então dizemos que  $\|f\|_2 = \infty$ ).

Agora podemos definir a transformada de Fourier.

**Definição 2.3.** Dada a função  $f(x)$  para o qual  $\|f\|_1$  é finito, a **Transformada de Fourier** de  $f(x)$  é denotada por  $\widehat{f}(x)$  e é definida como:

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx.$$

## 2.2 Propriedades

Nesta seção, as atenções são voltadas para algumas propriedades importantes da transformada de Fourier, que serão apresentadas em forma de teoremas.

**Teorema 2.1.** A operação transformada de Fourier  $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}$  tem as seguintes propriedades:

- **Linearidade:** Para quaisquer constantes  $a$  e  $b$ ,

$$af + bg \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f} + b\widehat{g}.$$

- **Escala:** Para cada constante positiva  $p$ ,

$$f\left(\frac{x}{p}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} p\widehat{f}(pu) \quad e \quad f(px) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{p}\widehat{f}\left(\frac{u}{p}\right).$$

- **Mudança:** Para cada constante real  $c$ ,

$$f(x - c) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(u)e^{-i2\pi cu}.$$

- **Modularização:** Para cada constante real  $c$ ,

$$f(x)e^{i2\pi cx} \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(u - c).$$

**Demonstração**

Provaremos o teorema para o item (a):

Se as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  têm as transformadas de Fourier  $X(t)$  e  $Y(t)$ , respectivamente, então a soma  $x(t) + y(t)$  têm a transformada  $X(t) + Y(t)$ .  
Pois:

$$\begin{aligned} \widehat{x(t) + y(t)} &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)] e^{-i2\pi ut} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ut} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi ut} dt \\ &= X(u) + Y(u) \end{aligned}$$

Provaremos o teorema para o item (b):

Iniciamos mudando a variável  $s = x/p$  então

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{p}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{p}\right) e^{-i2\pi ux} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi u(ps)} d(ps) \\ &= p \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi (pu)s} ds = p \hat{f}(pu) \end{aligned}$$

portanto,  $f(x/p) \xrightarrow{\mathcal{F}} p \hat{f}(pu)$ . E substituindo  $1/p$  por  $p$  teremos:

$$f(px) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{p} \hat{f}(u/p)$$

Provaremos o teorema para o item (c):

Iniciamos mudando a variável  $s = x - c$  então

$$\begin{aligned} f(x - c) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - c) e^{-i2\pi ux} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi u(s+c)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi us} ds e^{-i2\pi cu} = \hat{f}(u) e^{-i2\pi cu} \end{aligned}$$

Provaremos o teorema para o item (d):

Observe que  $e^{i2\pi cx} e^{-i2\pi ux} = e^{-i2\pi(u-c)x}$ , então

$$f(x) e^{i2\pi cx} \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi(u-c)x} dx = \hat{f}(u - c)$$

□

## 2.3 Transformada Inversa

**Teorema 2.2.** Se  $f(x)$  é contínua e  $\|f\|_1$  com  $\|\hat{f}\|_1$  ambas finitas, então:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) e^{i2\pi ux} du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

A integral do teorema é dita transformada inversa de Fourier. Se  $\|g\|_1$  é finito, então definimos  $\tilde{g}$  como:

$$\tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i2\pi ux} du$$

Ou seja, podemos reescrever  $\tilde{\hat{f}} = f$  ou  $\hat{f} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f$ .

## 2.4 Transformada de Fourier para sinais bidimensionais contínuos

O conceito de transformada de Fourier pode ser facilmente estendido para uma função de duas variáveis  $f(x, y)$ . Se  $f(x, y)$  é contínua e integrável e  $F(u, v)$  é integrável, então existe:

$$F(u, v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Assim como no caso com uma variável,  $F(x, y)$  é complexa e sua amplitude,  $|F(x, y)|$ , é denominada **espectro de Fourier**.

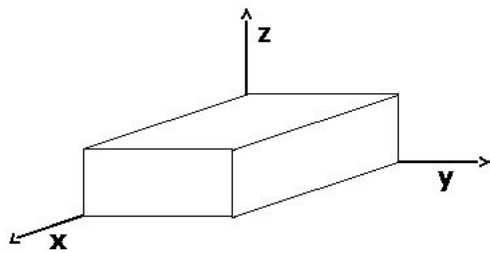


FIGURA 2.1: Função  $f(x, y)$ .

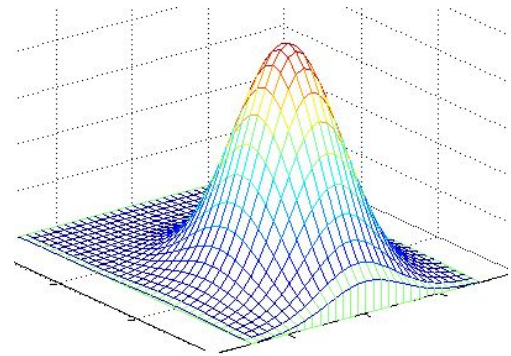


FIGURA 2.2: Domínio de frequência em perspectiva tridimensional.

As figuras representam: Figura (2.1) uma função bidimensional contínua; Figura (2.2) um espectro em perspectiva tridimensional e Figura (2.3) um espectro representado como uma função de intensidade, na qual o brilho é proporcional à amplitude de  $|F(u, v)|$ .

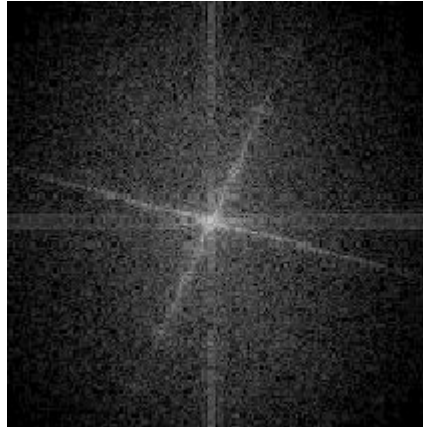


FIGURA 2.3: Domínio de frequência como função de intensidade

## 2.5 Uma introdução a Convolução

A convolução de duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , que é indicada por  $f(x) * g(x)$  é definida por:

**Definição 2.4.** Se  $f$  e  $g$  são duas funções, com  $\|f\|_1$  e  $\|g\|_1$  finitos, então a convolução de  $f$  e  $g$  é definida como:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x - s)ds$$

onde a variável  $s$  é dita uma variável 'vazia'.

A importância da convolução para análise no domínio da frequência surge do fato de que  $f(x) * g(x)$  e  $F(x)G(x)$  são pares da transformada de Fourier cuja expressão:

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(x)G(x)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(x) * G(x)$$

Estes dois resultados são conhecidos como teorema de Fourier. Do ponto de vista prático (processamento de imagens) a convolução desempenha papel fundamental. Pois, obtidas as transformadas de duas imagens, a sua convolução é obtida simplesmente fazendo o produto dessas duas transformadas, seguida da transformada inversa. A convolução de uma imagem pela outra pode ser interpretada fisicamente como uma medida ponto a ponto de enquadramento.

## Capítulo 3

# A Transformada Discreta de Fourier (DFT)

### 3.1 Considerações

Diversas transformações discretas têm sido utilizadas em processamentos digital de imagens, principalmente quanto a: realce, restauração, reconstrução, codificação e descrição de imagens. A transformada de Fourier, implementada na forma de transformada discreta de Fourier (DFT) ou transformada rápida de Fourier (FFT), constitui uma poderosa ferramenta para processamento de imagens, apresentando propriedades importantes para as transformações bidimensionais.

### 3.2 Dedução da DFT

Nesta seção aproximaremos os coeficientes de Fourier deduzindo assim a DFT. Considere o  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $C_k$  da função  $g(x)$ , usando o período  $P$ :

$$C_k = \frac{1}{P} \int_0^P g(x) e^{-i2\pi kx/P} dx$$

Aproximando a integral por Soma de Riemann:

$$C_k \approx \frac{1}{P} \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j) e^{-i2\pi kx_j/P} \frac{P}{N}$$

quando  $x_j = j\frac{P}{N}$  para  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Então teremos

$$C_k \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g\left(j\frac{P}{N}\right) e^{-i2\pi jk/N}$$



Destas fórmulas definiremos a DFT.

**Definição 3.1.** Considere o número complexo  $N$ ,  $\{h_j\}_{j=0}^{N-1}$ , então o  $N$ -point da DFT é denotado por  $\{H_k\}$  onde  $H_k$  é definido por

$$H_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{-i2\pi jk/N}$$

para todos inteiros  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### 3.3 Propriedades básicas da DFT

Nesta seção discutiremos propriedades básicas da DFT (linearidade, periodicidade e inversão).

**Teorema 3.1.** Supondo que a sequência  $\{h_j\}_{j=0}^{N-1}$  tem  $N$ -point DFT  $\{H_k\}$  e a sequência  $\{g_j\}_{j=0}^{N-1}$  tem  $N$ -point DFT  $\{G_k\}$ , então seguem as propriedades:

- **Linearidade.** Para toda constante complexa  $a$  e  $b$ , a sequência  $\{ah_j + bg_j\}_{j=0}^{N-1}$  tem  $N$ -point DFT  $\{aH_k + bG_k\}$ .
- **Periodicidade.** Para todos inteiros  $k$  nós temos  $H_{k+N} = H_k$ .
- **Inversão** Para  $j = 0, 1, \dots, N-1$ ,

$$h_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{i2\pi jk/N}.$$

**Definição 3.2.** Se  $\{G_k\}_{k=0}^{N-1}$  é sequência do número complexo  $N$ , então  $N$ -point da DFT inversa é definido por:

$$g_j = \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{i2\pi jk/N}$$

para todos os inteiros  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A inversa DFT tem propriedades linear, periódica e inversa. Para a inversão da inversa da DFT temos:

$$G_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-i2\pi jk/N}$$

## Capítulo 4

# A Transformada Rápida de Fourier (FFT)

### 4.1 Definição da FFT

A Transformada Rápida de Fourier (em inglês Fast Fourier Transform, ou FFT) é um algoritmo eficiente para se calcular a Transformada discreta de Fourier (DFT) e a sua inversa. As Transformadas Rápidas de Fourier são de grande importância em uma vasta gama de aplicações, de Processamento digital de sinais para a resolução de equações diferenciais parciais a algoritmos para multiplicação de grandes inteiros.

O cálculo direto de  $n$  pontos da DFT requer  $(n-1)^2$  multiplicações e  $n(n-1)$  adições. Para um  $n$  muito grande, ou seja  $n > 1000$ , é necessário muito tempo de máquina para os cálculos. A FFT é utilizada para reduzir o tempo de cálculo, portanto a implementação da Transformada Rápida de Fourier foi uma das maiores contribuições para a análise numérica do século passado.

De agora em diante, consideraremos a DFT assumindo  $N$  na forma  $N = 2^R$ , onde  $R$  é um inteiro positivo. Então:

$$H_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_j W^{jk}$$

para  $W$  igual a  $e^{i2\pi/N}$  ou  $e^{-i2\pi/N}$ .

Expressaremos em duas somas:

$$H_k = \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}N-1} h_{2j} (W^2)^{jk} + \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}N-1} h_{2j+1} (W^2)^{jk} W^k \quad (4.1)$$

Então considerando a equação (4.1) escrevemos  $H_k$  como

$$\begin{aligned} H_k &= H_k^0 + W^k H_k^1 \\ H_k^0 &= \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}N-1} h_{2j}(W^2)^{jk} \\ H_k^1 &= \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}N-1} h_{2j+1}(W^2)^{jk}, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

É importante perceber que os índices devem ser pares. Então  $N = 2^R$  e nessas condições podemos dividir  $N$  por 2, assim

$$W^{N/2} = -1 \quad (4.3)$$

Utilizando-se a equação (4.3), e o fato de  $H_k^0$  e  $H_k^1$  ambos possuírem período igual a  $N/2$ , podemos reescrever a equação (4.2) como

$$H_k = H_k^0 + W^k H_k^1, \quad H_{k+N/2} = H_k^0 - W^k H_k^1$$

para  $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ . Este cálculo pode ser representado por um diagrama.

$$\begin{array}{ccc} H_k^0 & \longrightarrow & H_k^0 + W^k H_k^1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & & H_k^0 - W^k H_k^1 \\ & \nearrow & \searrow \\ H_k^1 & \longrightarrow & H_k^0 - W^k H_k^1 \end{array}$$

Esse diagrama é conhecido como *butterfly*. A divisão de  $H_k$  em duas DFTs,  $H_k^0$  e  $H_k^1$ , pode ser repetida em  $H_k^0$  e  $H_k^1$ .

Dessa forma a FFT reduz muito o tempo de máquina. Para  $N = 1024$ , a FFT requer 5120 multiplicações, enquanto a DFT requer 1.046.529 multiplicações. Ou seja, esse algoritmo reduz 200 vezes o tempo de cálculo.

Assim, analisaremos em detalhes alguns componentes da FFT:

- esquema de inversão de bits
- rotações envolvidas na *butterfly*
- cálculos do seno e cosseno necessários

## 4.2 O esquema de inversão de bits

O esquema de inversão de bits é a primeira componente da FFT que reorganiza os dados iniciais. O *algoritmo de Buneman's* é um simples método que realiza a inversão de bit. Este algoritmo é baseado num padrão simples.

Se tivermos que permutar  $N$  números

$$(0, 1, \dots, N - 1)$$

faremos a expansão para  $2N$

$$(0, 1, \dots, 2N - 1)$$

essa expansão é obtida dobrando o número de permutações de  $(0, 1, \dots, N - 1)$  para os  $N$  primeiros números, e adicionando um aos demais.

Veja a expansão:

$$\begin{array}{c}
 0 \ 1 \\
 \downarrow *2 \\
 0 \ 2 \xrightarrow{+1} 1 \ 3 \\
 \downarrow \\
 0 \ 4 \ 2 \ 6 \xrightarrow{+1} 1 \ 5 \ 3 \ 7 \\
 \downarrow *2 \\
 0 \ 8 \ 4 \ 12 \ 2 \ 10 \ 6 \ 14 \xrightarrow{+1} 1 \ 9 \ 5 \ 13 \ 3 \ 11 \ 7 \ 15 \\
 \\
 0 \ 8 \ 4 \ 12 \ 2 \ 10 \ 6 \ 14 \ 1 \ 9 \ 5 \ 13 \ 3 \ 11 \ 7 \ 15
 \end{array}$$

Quando cada  $a_j$  for 0 ou 1. O número  $m$  é mapeado para imagem inversa  $P_N(m)$ , então

$$P_N(m) = (a_R \dots a_2 a_1)_{\text{base } 2}.$$

Se nós dobrarmos  $P_N(m)$ , temos

$$2P_N(m) = (a_R \dots a_2 a_1 0)_{\text{base } 2}$$

e vemos que  $2P_N(m)$  é a inversão de bit da imagem de  $m = (0a_1a_2\dots a_R)_{\text{base } 2}$  quando  $m$  é considerado como elemento de  $0, 1, \dots, 2N - 1$ . Note que descritos os primeiros  $N$  do conjunto  $0, 1, \dots, 2N - 1$ .

Consequentemente,

$$2P_N(m) + 1 = (a_R \dots a_2 a_1 1)_{\text{base } 2}$$

é inverso de

$$m = (1a_1a_2\dots a_R)_{\text{base } 2}$$

que calcula para os últimos  $N$  números da lista  $0, 1, \dots, 2N - 1$ .

Conjunto Original	Índice	Conjunto Reordenado	Índice
f(0)	000	f(0)	000
f(1)	001	f(4)	100
f(2)	010	f(2)	010
f(3)	011	f(6)	110
f(4)	100	f(1)	001
f(5)	101	f(5)	101
f(6)	110	f(3)	011
f(7)	111	f(7)	111

TABELA 4.1: Reordenação Usando a Inversão de Bits.

Para visualizarmos uma transformada de 8 pontos  $\{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\}$ . A primeira divisão entre pares e ímpares nos fornece dois conjuntos  $\{f(0), f(2), f(4), f(6)\}$  e  $\{f(1), f(3), f(5), f(7)\}$ . Na segunda divisão temos quatro conjuntos  $\{f(0), f(4)\}$ ,  $\{f(2), f(6)\}$ ,  $\{f(1), f(5)\}$  e  $\{f(3), f(7)\}$ .

Escrevendo esta ordem na tabela podemos comparar os índices e a ordem dos bits dos mesmos.

### 4.3 Rotações na FFTs

O segundo maior componente da FFT são as sucessivas *butterflies* formadas durante os estágios. Cada cálculo de *butterfly* requer multiplicações da forma

$$W^m Z \quad (4.4)$$

em que  $Z$  é um número complexo, assim como  $W^m$ .

Veremos que a equação (4.4) pode representar as rotações. O complexo  $Z$  pode ser escrito como

$$Z = A + Bi$$

em que  $A$  e  $B$  são números reais. E  $W^m$  pode<sup>1</sup> ser escrito por

$$W^m = \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{N}\right), \quad (m = 0, 1, \dots, N/2 - 1). \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>Se  $W = e^{i2\pi/N}$

Simplificando a notação adotaremos:

$$\begin{aligned} C(m) &= \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \\ S(m) &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \\ T(m) &= \tan\left(\frac{\pi m}{N}\right) \end{aligned}$$

Então a equação (4.5) resume se em

$$W^m = C(m) + iS(m)$$

Portanto a expressão inicial  $W^m Z$  pode ser reescrita como

$$W^m Z = [C(m)A - S(m)B] + i[S(m)A + C(m)B].$$

Em termos de parte real e parte imaginária, temos:

$$\operatorname{Re}(W^m Z) = C(m)A - S(m)B, \quad \operatorname{Im}(W^m Z) = S(m)A + C(m)B. \quad (4.6)$$

Podemos interpretar a equação (4.6) como uma descrição de rotação do vetor  $(A, B)$  com ângulo  $2\pi m/N$ . Essa formula requer 4 multiplicações reais, mas devido ao algoritmo de Buneman é reduzida para 3 as multiplicações em contrapartida são aumentada de 2 para 3 as somas.

As multiplicações normalmente<sup>2</sup> tomam muito mais tempo de processamento do que as somas, então esse processo reduz consideravelmente o tempo de máquina.

O algoritmo se baseia na identidade trigonométrica,

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

que com um pouco de algebra arranjamos em

$$\cos \theta = 1 - \operatorname{sen} \theta \tan \frac{1}{2}\theta \quad (4.7)$$

e, multiplicando ambos os lados por  $(1 + \cos \theta)$  e aplicando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} \theta = (1 + \cos \theta) \tan \frac{1}{2}\theta \quad (4.8)$$

Substituindo  $\theta$  por  $2\pi m/N$  nas equações (4.7) e (4.8) obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} C(m) &= 1 - S(m)T(m); \\ S(m) &= [1 + C(m)]T(m). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Observe: Que esta afirmação nem sempre é válida.

Utilizando o resultado obtido na equação da parte real  $\text{Re}(W^m Z)$ :

$$\text{Re}(W^m Z) = A - S(m)[B + T(m)A]$$

Se definirmos uma auxiliar  $V = B + T(m)A$ , então

$$\text{Re}(W^m Z) = A - S(m)V .$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a equação da parte imaginária:

$$\begin{aligned} \text{Im}(W^m Z) &= [1 + C(m)]T(m)A + [1 - S(m)T(m)]B \\ &= [B + T(m)A] + [C(m)A - S(m)B]T(m) \\ &= V + \text{Re}(W^m Z)T(m) . \end{aligned}$$

Portanto, o processo para o calculo da  $\text{Re}(W^m Z)$  e  $\text{Im}(W^m Z)$ , com  $W = e^{i2\pi/N}$  é:

$$\begin{aligned} V &= B + T(m)A \\ \text{Re}(W^m Z) &= A - S(m)V \\ \text{Im}(W^m Z) &= V + \text{Re}(W^m Z)T(m) . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Com este 3 passos necessitamos de apenas 3 multiplicações em vez de 4 requeridas anteriormente. Portanto, este processo economiza 25% do tempo de processamento.

## 4.4 Calculando Senos e Tangentes

Nesta secção entenderemos como serão feitos os calculos em alta performace de  $S(m)$  e  $T(m)$  para  $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ , definidos anteriormente como:

$$\begin{aligned} S(m) &= \text{sen}\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \\ T(m) &= \tan\left(\frac{\pi m}{N}\right), \quad (m = 0, 1, \dots, N/2 - 1). \end{aligned}$$

No processo de calculo para  $N$  pontos alguns valores de  $S(m)$  e  $T(m)$  podem ser repetidos e usados mais de uma vez. Por conta disso computaremos os dados em *fila*. Inicialmente consideraremos somente os valores de  $S(m)$  e  $T(m)$  para  $m = 0, \dots, N/4 - 1$  para efetuarmos os calculos. Portanto, se tivermos  $N = 1024$  serão necessários apenas 256 pontos para armazenar os valores.

Consideraremos o caso do valor de  $m$  entre  $N/4 \leq m \leq N/2 - 1$ , então

$$\begin{aligned} W^m &= W^{m-\frac{N}{4}} W^{\frac{N}{4}} \\ &= W^{m-\frac{N}{4}} i \end{aligned}$$



Como  $Z = A + Bi$ , conseqüentemente

$$W^m Z = W^{m-\frac{N}{4}}(-B + Ai) .$$

Realizando as devidas substituições nas equações (4.9), teremos

$$\begin{aligned} V &= A - T\left(m - \frac{1}{4}N\right) B \\ \operatorname{Re}(W^m Z) &= -B - S\left(m - \frac{1}{4}N\right) V \\ \operatorname{Im}(W^m Z) &= V + \operatorname{Re}(W^m Z)T\left(m - \frac{1}{4}N\right) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

para  $m = N/4, \dots, N/2 - 1$ .

Usando a equação (4.9) para  $m = 0, 1, \dots, N/4 - 1$ , e a equação (4.10) para  $m = N/4, \dots, N/2 - 1$ , fica evidente que apenas alguns valores são necessários para efetuarmos os calculos. Não precisamos calcular arbitrariamente valores da função  $\operatorname{sen}(2\pi m/N)$  para  $m = 0, 1, \dots, N/4$ .

O método se baseia na seguinte identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \phi) + \operatorname{sen}(\theta - \phi)}{2 \cos \phi} . \quad (4.11)$$

O primeiro passo é atribuir  $S(0) = 0$  e  $S(N/4) = 1$ , pois

$$\begin{aligned} S(0) &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 0}{N}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0 \\ S(N/4) &= \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi N/4}{N}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Definiremos  $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$  e  $z_1 = \sqrt{2}$ . Utilizaremos a equação (4.11) e o fato de  $z_1 = 2 \cos(\phi)$ ,

$$S\left(\frac{1}{8}N\right) = \frac{S\left(\frac{1}{4}N\right) + S(0)}{z_1}$$

O segundo passo é multiplicar  $\phi$  por  $\frac{1}{2}$  e admitir  $\phi_2 = \phi_1/2$ . Então

$$\begin{aligned} 2 \cos \phi_2 &= 2 \cos\left(\frac{1}{2}\phi_1\right) = (2 + 2 \cos \phi_1)^{1/2} \\ &= (2 + z_1)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Definiremos  $z_2$  como  $2 \cos \phi_2$  e reescreveremos a equação como

$$z_2 = (2 + z_1)^{1/2} . \quad (4.13)$$

Combinando as equações (4.11), (4.12) e (4.13), conseguimos

$$S\left(\frac{1}{16}N\right) = \frac{S\left(\frac{1}{8}N\right) + S(0)}{z_2} , \quad S\left(\frac{3}{16}N\right) = \frac{S\left(\frac{1}{4}N\right) + S\left(\frac{1}{8}N\right)}{z_2}$$

O terceiro passo está em definir  $z_3 = (2 + z_2)^{1/2}$ . Usando  $z_3$  como  $2 \cos(\phi)$  na equação (4.11), com  $\phi_3 = \phi_2/2$ , obtemos:

$$S\left(\frac{1}{32}N\right) = \frac{S(\frac{1}{16}N) + S(0)}{z_3} \quad , \quad S\left(\frac{3}{32}N\right) = \frac{S(\frac{1}{8}N) + S(\frac{1}{16}N)}{z_3}$$

$$S\left(\frac{5}{32}N\right) = \frac{S(\frac{3}{16}N) + S(\frac{1}{8}N)}{z_3} \quad , \quad S\left(\frac{7}{32}N\right) = \frac{S(\frac{1}{4}N) + S(\frac{3}{16}N)}{z_3}$$

Assim, completamos os primeiros três estágios do método de Buneman's. Calculamos os valores  $S(jN/32)$  para  $j = 0, 1, \dots, 8$ . E se  $N = 32$ , então encerramos o processo.

Para novos estágios devemos considerar a equação (4.11) ,

$$\phi_{k+1} = \frac{1}{2}\phi_k \quad e \quad z_{k+1} = (2 + z_k)^{1/2} .$$

Note que se  $N$  fosse igual a 64 precisaríamos de mais um estágio. Para  $N = 2^R$ , o método requer  $R - 2$  estágios para calcular todos os  $S(m)$  para  $m = 0, 1, \dots, N/4$ .

Sendo assim, o método calcula os valores  $S(m)_{m=0}^{N/4}$  em alta performance, e para valores de  $T(m)_{m=0}^{N/4}$  o algoritmo segue a mesma linha de raciocínio partindo da equação  $T(m) = \tan\left(\frac{\pi m}{N}\right)$ .

## 4.5 Calculando duas FFTs reais simultaneamente

A Transformada Rápida de Fourier pode ser aplicada em números complexos, mas no caso de trabalharmos com Domínio real podemos melhorar a performance. Sendo assim, diminuiremos os calculos efetuados e conseqüentemente reduziremos o tempo necessário para realizar as contas.

Então, admitiremos nesta seção estarmos trabalhando com Domínio real. Consideremos também, a convolução<sup>3</sup> para duas sequências de dados reais.

Então, suponha  $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$  e  $\{g_j\}_{j=0}^{N-1}$  como duas sequências de  $N$  números reais. Definiremos a sequência de  $N$  números complexos  $\{h_j\}$  como:

$$h_j = f_j + ig_j \quad , \quad (j = 0, 1, \dots, N - 1).$$

Tomadas  $N$  pontos da FFT de  $\{h_j\}$  teremos  $\{H_j\}$  como:

$$H_k = \sum_{j=0}^{N-1} (f_j + ig_j) W^{jk} \quad , \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1)$$

<sup>3</sup>Convolução: detalhes em secção 2.4

considerando  $W = e^{i2\pi/N}$  ou  $W = e^{i2\pi/N}$ . A equação acima pode ser reescrita como:

$$H_k = F_k + iG_k, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (4.14)$$

para

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j W^{jk}, \quad G_k = \sum_{j=0}^{N-1} g_j W^{jk}$$

com  $N$  pontos FFTs de  $\{f_j\}$  e  $\{g_j\}$ , respectivamente.

Tomamos o conjugado  $F_{N-k}^*$  de  $F_{N-k}$ :

$$F_{N-k}^* = \left[ \sum_{j=0}^{N-1} f_j W^{j(N-k)} \right]^* = \sum_{j=0}^{N-1} f_j^* (W^{jN})^* (W^{-jk})^*$$

Do fato que  $f_j$  é real concluímos que  $f_j^* = f_j$ .

Como  $W^N = 1$  então  $(W^{jN})^* = 1$ .

Porque  $W^{-jk} = (W^{jk})^*$  temos que  $(W^{-jk})^* = W^{jk}$ . E contando com esses fatos podemos simplificar a ultima equação para:

$$F_{N-k}^* = F_k \quad \text{ou} \quad F_{N-k} = F_k^*. \quad (4.15)$$

Dessa mesma linha de raciocínio concluímos que

$$G_{N-k}^* = G_k \quad \text{ou} \quad G_{N-k} = G_k^* \quad (4.16)$$

porque  $\{g_j\}$  também é um número real.

Utilizando-se da equação (4.14), (4.15) e (4.16), obtemos a seguinte expressão:

$$H_{N-k}^* = F_k - iG_k$$

Esta ultima equação combinada com a equação (4.14) resulta em

$$F_k = \frac{1}{2}[H_{N-k}^* + H_k], \quad G_k = \frac{i}{2}[H_{N-k}^* - H_k]. \quad (4.17)$$

Portanto para calcular FFTs simultaneamente de duas seqüências de  $N$  pontos  $\{f_j\}$  e  $\{g_j\}$ . O método consiste em:

1. Definir  $h_j = f_j + ig_j$  para  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .
2. Aplicar a FFT em  $h_j$  encontrando a  $H_j$
3. Utilizar da equação (4.17) para determinar  $F_j$  e  $G_j$  para  $j = 0, 1, \dots, N-1$

## Capítulo 5

# Algumas Aplicações

### 5.1 Equação do calor

A resolução da equação do calor foi a motivação que levou Fourier a desenvolver essa nova teoria. Portanto, descreveremos essa simples modelagem que descreve o problema da condução térmica.

Consideremos a função  $u(x, t)$ , variando de  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq 0$ , sendo interpretada como a temperatura de uma barra variando a partir de 0. E a função  $g(x)$  como *temperatura inicial*  $u(x, 0) = g(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{equação do calor} \\ u(0, t) &= 0 && \text{condição geral} \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{condição inicial} \end{aligned} \tag{5.1}$$

A constante  $a^2$  é denominada *constante de difusão* do material, que normalmente é medida em  $\text{cm}^2\text{sec}$ . O cobre, por exemplo, tem 1.14 como constante de difusão, enquanto que o granito tem 0.011 como constante de difusão.

Esse problema é um clássico da física-matemática. Na primeira resolução Fourier deriva e soluciona por séries de Fourier. A segunda interpretação do problema (5.1) é que a função  $u$  descreve uma concentração relativa ao redor da solução. A função  $g(x)$  descreve a concentração relativa inicial. Esta interpretação é descrita em vários livros de física.

Normalmente o método para separar as variáveis é utilizado para solucionar a equação (5.1). Estes métodos são mais conhecidos, então,

apresentaremos um outro método.

Iniciamos expandindo a função  $u(x, t)$  em séries de Fourier em função de  $x$ . Para todas as funções do sistema  $\{\text{sen}(n\pi x/L)\}_{n=1}^{\infty}$  satisfaz as condições iniciais com  $x = 0$  e  $x = L$ , expandimos em séries do seno de Fourier.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \\ B_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para encontrar a função  $B_n(t)$  substituíremos na equação (5.1) e diferenciaremos termo a termo, obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} B'_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 B_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Expressando como uma série de seno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ B'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 B_n(t) \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0$$

Então a condição para zerar a equação é

$$B'_n + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 B_n(t) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

Substituindo  $t = 0$  na equação (5.2), teremos

$$B_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Note que do lado direito a equação é constante para todo  $n$ ; representa o coeficiente seno da temperatura inicial  $u(x, 0)$ . Definiremos  $b_n$  como

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

então

$$B_n(0) = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.4)$$

Para cada  $n$ , a solução da equação diferencial (5.3) com condição inicial (5.4) é

$$B_n(t) = b_n e^{-(n\pi a/L)^2 t} \quad (5.5)$$

Concluimos a resolução combinando as equações (5.2) e (5.5). A série do seno de Fourier soluciona a equação (5.1)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-(n\pi a/L)^2 t} \right] b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (5.6)$$

com

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (5.7)$$

Ou seja, a temperatura  $u(x, t)$  para  $t > 0$  é obtida *reduzindo o fator*

$$e^{n\pi a/L)^2 t} \quad \textit{Gaussian damping factor}$$

do coeficiente da série do seno de Fourier para a temperatura inicial  $u(x, 0)$ .

## 5.2 Filtros usados no processamento de sinais

O principal objetivo das técnicas de realce de imagens é processar uma certa imagem de modo que a imagem resultante seja mais adequada, que a imagem original, para uma aplicação específica. Porém, a interpretação do resultado é subjetiva e depende de conhecimentos prévios do observador.

Basicamente os métodos de filtragem de imagens digitais se dividem em duas categorias: as técnicas de filtragem no domínio espacial (aplicadas diretamente na matriz) e as técnicas aplicadas no domínio de frequência (baseadas na transformada de Fourier).

Introduziremos um filtro *independente do espaço de tempo* que é utilizado em processamento de sinal.

- **Cesàro Filter**

O filtro Cesàro também é conhecido como método da **média aritmética**. Na figura podemos observar uma sucessiva soma parcial da série de Fourier que se interlaçam ao redor do gráfico de uma função. Note que as somas fazem um entrelace sobre a função e que muitos pontos encontram-se logo abaixo ou acima.

De uma forma inteligente marcaremos os pontos proporcionalmente, a média aritmética, das somas parciais para melhorar a aproximação.

**Definição 5.1.** *Dado uma função com soma parcial das séries de Fourier  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ , a  $M$  média aritmética, ou Filtro Cesàro de séries de Fourier para  $M$  harmônicas, é denotada por  $\sigma_M$  como*

$$\sigma_M = \frac{1}{M} [S_0 + S_1 + \dots + S_{M-1}]$$

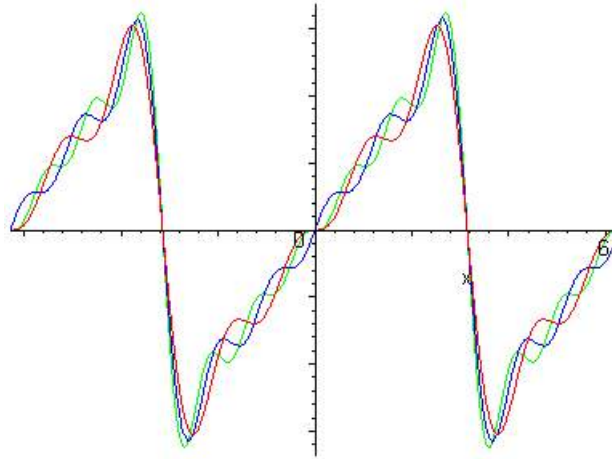


FIGURA 5.1: Função com 5, 6 e 7 harmônicas.

E tomando  $S_k$  como  $\sum_{j=-k}^k C_j e^{i\pi jx/L}$ , teremos

$$\sigma_M(x) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left[ \sum_{j=-k}^k c_j e^{i\pi jx/L} \right]$$

Fixando o valor de  $n$ , para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ , e contando com que frequência  $c_n$  aparece na soma, obtemos

$$\sigma_M(x) = \sum_{n=-M}^M \left( 1 - \left| \frac{n}{M} \right| \right) c_n e^{i\pi nx/L}$$

Se igualarmos  $\sigma_M(x)$  com  $S_M$ , então

$$S_M(x) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{i\pi nx/L}$$

Note que este filtro serve para suavizar o fenômeno de Gibbs'.

Assim como o filtro Cèsaro outros filtros como: *de le Vallée*, *Poussin*, *Hamming* e *Hanning* atuam na função aproximando-a e filtrando a frequência, respectivamente.

# Capítulo 6

## Processamento de Imagem

### 6.1 Introdução

A computação gráfica é definida como “Métodos e técnicas para converter dados para/de um dispositivo gráfico através do computador”.

A área de processamento de imagens vem sendo objeto de crescente interesse por permitir viabilizar grande número de aplicações.

O principal aspecto abordado pela computação gráfica é o da comunicação visual, através da síntese de imagens em dispositivos de saída apropriados. Um resultado apresentado na forma de gráfico em duas ou três dimensões é muito mais fácil de ser interpretado pelo homem do que um resultado apresentados através de tabelas numéricas, sem contar que uma imagem é muito mais fácil de ser lembrada do que uma coleção de números.

Para estudar e analisar os diversos tipos de sinais do universo, devemos procurar descrições matemáticas, determinar meios de construir representações discretas, e buscar algoritmos que implementem as mais diversas técnicas.

### 6.2 Matriz imagem

Uma imagem é composta por um conjunto de pontos, ou seja, é uma matriz de pontos ou pixels, com uma determinada resolução horizontal (eixo X) e vertical (eixo Y), onde para cada ponto desta matriz tem uma cor associada.

Exemplo: A figura (6.1) ilustra as imagens referentes das matrizes



$A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

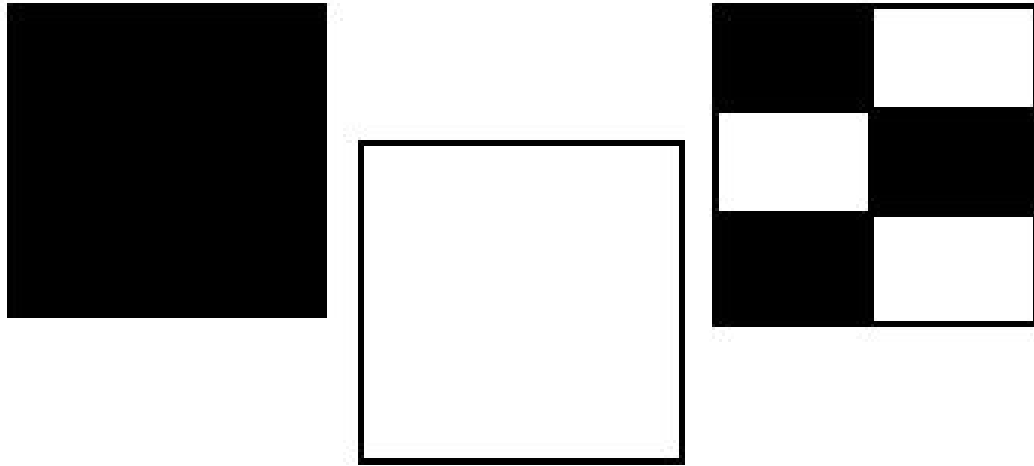


FIGURA 6.1: Imagens em branco e preto das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$

Existem diferentes formatos de arquivos para o armazenamento de imagens, uma vez que temos várias classes diferentes de representações de imagens. O armazenamento da imagem envolve basicamente três elementos principais: a forma como a imagem está representada, o tipo de compactação empregado e o cabeçalho contendo as informações a cerca desta imagem (resolução, número de cores, classe da imagem, palette, compactação, etc).

Alguns dos formatos de arquivos de imagens largamente utilizados na atualidade são:

- BMP: Bitmap usado no PaintBrush e CorelDraw (Windows).
- PCX: Usado no PaintBrush e CorelDraw.
- GIF: Formato usado no Animator / 3D Studio.

Tipo de imagem	Característica de cada ponto
Imagem Monocromática: Preto e Branco	Possui associada uma informação de aceso/apagado (Branco ou Preto)
Imagem Monocromática: Tonalidades de cinza	Possui um valor associado que indica uma intensidade de luminosidade entre o preto e o branco
Imagem Policromática (colorida) com Tabela de Palette:	Temos um acesso indireto a cor real de cada ponto.
Imagem Policromática Multiespectral (Imagem Truecolor - RGB - 24 bits):	Imagem formada pela composição dos três componentes básicos

TABELA 6.1: Tipo de informação da Imagem.

### 6.3 Filtro passa-baixas (FPB)

Sendo  $F(u, v)$  a transformada de Fourier da imagem a ser processada e sendo  $G(u, v)$  a transformada de Fourier da imagem que se deseja na saída, com os componentes de alta frequência atenuados, a filtragem passa-baixas consiste em encontrar um  $H(u, v)$  tal que:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

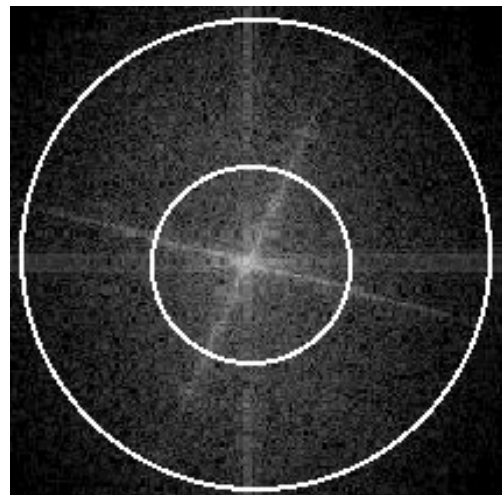
FIGURA 6.2: Imagem da placa DM como  $F(u, v)$ .

FIGURA 6.3: Espectro de Fourier.

Muito embora a abrupta transição, entre banda de passagem e banda de rejeição, do filtro não possa ser implementado fisicamente, ela pode ser

simulada por computador. A figura mostra uma imagem (6.2) e seu espectro (6.3) de Fourier, indicados sobre ele anéis, cujos raios são proporcionais as frequências de corte. Quanto menor o raio, menor a frequência de corte, e portanto, maior o grau de borramento da imagem resultante.



FIGURA 6.4: Imagem Borrada com frequência de corte maior.

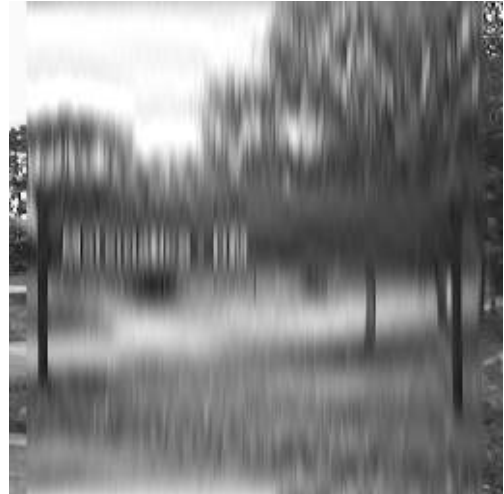


FIGURA 6.5: Imagem Borrada com frequência de corte menor.



FIGURA 6.6: Imagem original Departamento de Matemática.



FIGURA 6.7: Imagem Borrada com FFB.

## 6.4 Filtro passa-altas (FPA)

O objetivo do uso de filtros passa-altas em imagens é o realce de suas regiões de alta frequência, tais como bordas e/ou texturas ricas em variações

abruptas de níveis de cinza. Para o projeto de filtros passa-altas no domínio da frequência, com exceção óbvia, do comportamento em frequência desejado.

As figuras mostram duas imagens resposta (6.6) e (6.7) ao FPA.



FIGURA 6.8: Imagem com as bordas realçadas.

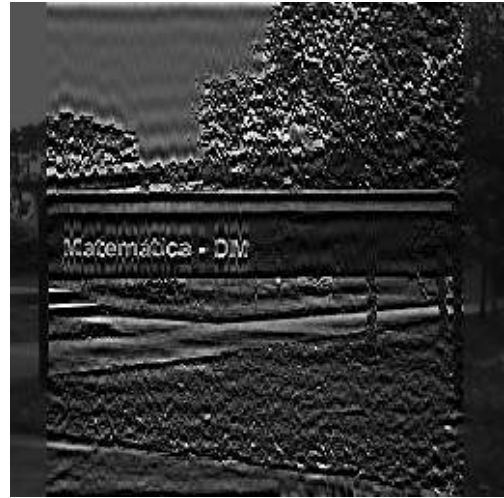


FIGURA 6.9: Imagem com mais realce.

## Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo principal a assimilação dos conceitos pelo aluno. Tal meta foi alcançada, construindo ao longo do ano uma boa vivência no assunto. Tanto as série de Fourier quanto as transformadas de Fourier mostraram-se de grande aplicabilidade.

As maiores dificuldades encontradas na elaboração deste trabalho foram: a interpretação da relação do domínio de frequência com a imagem; aspectos e termologias da computação; e o editor LATEX. Porém, nada prejudicou o andamento e o bom entendimento da pesquisa.

Grande parte das figuras deste trabalho foram geradas pelos softwares matemáticos Maple ou Matlab, mesmo as figuras que precisaram de tratamento. O software Matlab, em especial à aplicação de filtros, mostrou se pratico e de rápida implementação.

Além disso, destacaram se aspectos da teoria como aproximações de funções periódicas e análise no domínio de frequência, que pode levantarmos à suposições, ou envolver-nos numa exploração ou continuação deste trabalho.

## Referências Bibliográficas

- [1] Walker, J. S., *Fast Fourier Transforms*, 2º edição, pág 01 - 83, 1996, Editora CRC Press.
- [2] Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform and Applications*, pág 09 - 107, 1988, Editora Prentice Hall.
- [3] Marques Filho, O., *Processamento Digital de Imagens*, 1º edição, pág 56; 109 - 151, 1999, Editora Brasport.
- [4] Gomes, J., *Computação Gráfica: Imagem*, 1º edição, pág 17 - 61, 1994, Editora SBM.
- [5] Rocha, J. F., *Estudos de processamentos para análise de imagens aplicando técnicas no domínio da frequência*, pág 38 - 53, 1991, Editora Edufscar.
- [6] Sodré, U., *Séries de Fourier*, Notas de aula, Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/sfourier.pdf>, 2003
- [7] Sodré, U., *Transformada de Fourier*, Notas de aula, Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/tfourier.pdf>, 2003
- [8] IMPA, *Transformada de Fourier*, Site do IMPA, Disponível em: <http://www.visgrafimpa.br/>, 2006