



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Teorema de Pitágoras: Aplicações em Objetos de Aprendizagem

Valci Rodrigues Balbino Júnior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Sidineia Barrozo
Instituto de Química - UNESP Araraquara

2015

516 Balbino Júnior, Valci Rodrigues
B171t Teorema de Pitágoras: Aplicações em Objetos de Aprendizagem/
Valci Rodrigues Balbino Júnior- Rio Claro: [s.n.], 2015.
94 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Sidineia Barrozo
Instituto de Química - UNESP Araraquara

1. Geometria. 2. Matemática. 3. Objetos de Aprendizagem. 4.
Teorema de Pitágoras. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Valci Rodrigues Balbino Júnior

TEOREMA DE PITÁGORAS: APLICAÇÕES EM OBJETOS DE
APRENDIZAGEM

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Sidineia Barrozo
Instituto de Química - UNESP Araraquara
Orientadora

Prof. Dr. Northon Canevari Leme Penteado
IGCE - UNESP Rio Claro

Profa. Dra. Simone Daniela Sartório
CCA - UFSCar Araras

Rio Claro, 21 de Agosto de 2015

*Aos meus pais, à minha esposa,
aos meus irmãos, à minha família e aos meus
amigos que acreditaram sempre no meu sucesso.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que permitiu tudo isso, pela oportunidade e pelo dom da vida;

Aos meus pais pelo exemplo de dignidade e luta;

À minha esposa Rose pelo amor, pela dedicação, pela paciência, pelas revisões de texto e pelo incentivo nos momentos difíceis;

Aos meus irmãos e à minha família pelo apoio;

À minha orientadora e aos professores do programa PROFMAT, por terem me ajudado nessa caminhada;

Aos meus amigos e aos colegas de profissão por terem partilhado comigo essa busca de realização profissional;

À SBM e à UNESP por oferecerem essa oportunidade.

*Bem-aventurado o homem que acha sabedoria,
e o homem que adquire conhecimento;
Porque é melhor a sua mercadoria do que artigos de prata,
e maior o seu lucro que o ouro mais fino.
Mais preciosa é do que os rubis,
e tudo o que mais possas desejar não se pode comparar a ela.*

Provérbios 3:12-15

Resumo

Este trabalho realiza um estudo sobre o famoso Teorema de Pitágoras, abrangendo algumas demonstrações, aplicações e o desenvolvimento de um objeto de aprendizagem, cujo objetivo é auxiliar, de modo lúdico, na compreensão geométrica do Teorema no ensino básico. Para que as demonstrações sejam melhor compreendidas, será apresentada a parte da teoria da geometria dos triângulos necessária para o entendimento do estudo em questão. Assim, este trabalho será dividido em quatro partes: Um breve histórico; Conceitos de Geometria; Teorema de Pitágoras; Objetos de Aprendizagem. Um breve histórico: apresenta os aspectos filosóficos, culturais e históricos que influenciaram diversas civilizações em decorrência do teorema. Conceitos de Geometria: trata de propriedades e conceitos básicos da geometria, em especial a geometria dos triângulos, essenciais no desenvolvimento desencadeado pela teoria. Teorema de Pitágoras: apresenta demonstrações e resultados do teorema, ou em decorrência deste. Objeto de Aprendizagem: abrange aspectos teóricos e práticos na elaboração de um Objeto de Aprendizagem escrito em Flash.

Palavras-chave: Geometria, Matemática, Objetos de Aprendizagem, Teorema de Pitágoras.

Abstract

This research studies the famous Pythagorean theorem, including some demonstrations, applications and the development of a learning object. The main purpose of this learning object is to help students from basic education with the geometric comprehension of the theorem in a ludic way. The part of the theory of the angles geometry necessary to the understanding of this study will be presented, so the demonstrations can be better understood. This work will be divided in four parts: A brief history; Geometric Concepts; Pythagorean Theorem; Learning Objects. A brief history presents the philosophical, cultural and historical aspects that influenced many civilizations as a result of the theorem. Geometric Concepts is about the properties and the basic concepts of the geometry, especially the triangle geometry, which is essential to the development unleashed by the theory. Pythagorean Theorem presents demonstrations and results of the theorem or that are resulting from it. Learning Object covers the theoretical and practical aspects in the development of a learning object created in Flash.

Keywords: Geometry, Math, Learning objects, Pythagorean theorem.

Lista de Figuras

2.1	Mapa da Antiga Babilônia	21
2.2	Contagem Babilônica	22
2.3	Tábula Plimpton 322	23
2.4	Hieroglíficos	25
2.5	Pedra da Roseta	26
2.6	Papiro Rhind	27
2.7	Corda Egípcia com 11 nós	27
2.8	Problema do Papiro Cairo	28
2.9	Índia	28
2.10	Quadrado versão Baudhayana	29
2.11	Retângulo versão Katyayana	30
2.12	Primeira explicação: Descoberta hindu	30
2.13	Segunda explicação: Descoberta hindu	31
2.14	Grécia.	31
2.15	Primeira demonstração: Sugerida por Eves	33
2.16	Quadrado com medida da diagonal igual à $\sqrt{2}$	34
3.1	Elementos de um triângulo ABC	35
3.2	Triângulos $ABC \equiv A'B'C'$	36
3.3	Caso de Congruência de triângulos ALA	37
3.4	Caso de Congruência de triângulos LLL	38
3.5	Segmentos correspondentes divididos	39
3.6	Transversais divididas em partes congruentes	39
3.7	Segmentos comensuráveis	40
3.8	Teorema do Ângulo Externo	42
3.9	Ordem dos lados e ângulos de um triângulo	42
3.10	Desigualdade Triangular	43
3.11	Caso de semelhança AA	44
3.12	Caso de Semelhança LLL	44
3.13	Prova do Caso de Semelhança LLL	45
3.14	Área: Quadrado e Retângulo	46
3.15	Área: Paralelogramo	47

3.16	Área: Triângulo	48
3.17	Área: Trapézio	48
4.1	Triângulo qualquer.	49
4.2	Triângulo retângulo.	49
4.3	Triângulo ABC	50
4.4	Triângulo de lados 3, 4 e 5	52
4.5	Quadriculado Chou-pei	53
4.6	Triângulo isósceles	54
4.7	Triângulo de Bhaskara.	54
4.8	Triângulo de Garfield	55
4.9	Decomposição	56
4.10	1º caso: Recíproca do Teorema de Pitágoras	57
4.11	2º caso: Recíproca do teorema de Pitágoras	58
4.12	demonstração recíproca do Teorema de Pitágoras	58
4.13	Generalização: Teorema de Pitágoras	60
4.14	Polya: Polígonos	61
4.15	Polya: Triângulo conveniente.	62
4.16	Diagonal do Quadrado	63
4.17	Altura do triângulo equilátero.	64
4.18	Diagonal do bloco retangular	65
4.19	Relações na pirâmide	65
4.20	Relações no cone	66
4.21	Módulo de número complexo	66
4.22	Círculo trigonométrico	67
5.1	Fluxograma do Programa.	71
5.2	Carregamento e abertura	72
5.3	Pergunta inicial	73
5.4	Menu Principal	73
5.5	História de Pitágoras	74
5.6	Quebra-cabeça 1.	75
5.7	Quebra-cabeça	75
5.8	Créditos	76

Lista de Tabelas

2.1	Representação da Plimpton 322 (Universidade de Colúmbia)	23
-----	--	----

Sumário

1	Introdução	19
2	Um breve Histórico	21
2.1	Mesopotâmia (Babilônios)	21
2.2	Egípcios	24
2.3	Hindus	28
2.4	Gregos	31
2.5	Pitágoras	33
3	Conceitos de Geometria	35
3.1	Triângulos: Definição e elementos	35
3.2	Congruência de triângulos	36
3.3	Teorema de Tales	38
3.4	Desigualdade triangular	41
3.5	Semelhança de triângulos	43
3.6	Áreas	46
4	Teorema de Pitágoras	49
4.1	Demonstração por semelhança de triângulos	50
4.2	Caso particular: Triângulo retângulo de lados medindo 3, 4 e 5	51
4.3	Caso particular: Chou-peí	52
4.4	Caso particular: Triângulo retângulo isósceles	53
4.5	Demonstração por Bhaskara	54
4.6	Demonstração de Garfield	55
4.7	Demonstração por decomposição	56
4.8	Recíproca do Teorema de Pitágoras	57
4.9	Generalizando: Teorema para figuras semelhantes quaisquer	58
4.10	Demonstração de Polya: Prova do Teorema de Pitágoras e generalização	61
4.11	Aplicações do Teorema	62
4.11.1	Diagonal de um quadrado	62
4.11.2	Altura do triângulo equilátero	63
4.11.3	Diagonal de um bloco retangular	64

4.11.4	Relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares	65
4.11.5	Relação entre altura, geratriz e raio do cone reto	65
4.11.6	Módulo de número complexo	66
4.11.7	Razões Trigonométricas	66
5	Objetos de Aprendizagem	69
5.1	Definição de Objetos de Aprendizagem	69
5.2	Características dos Objetos de Aprendizagem	70
5.3	Objeto de Aprendizagem Pitágoras	70
5.3.1	Objetivo e considerações	71
5.3.2	Interface	72
5.3.3	Quebra-cabeça Decomposição	74
6	Conclusão	77
	Referências	79
A	Apêndice: Código fonte do Programa	81

1 Introdução

Pergunte a qualquer aluno do ensino básico o nome de um grande matemático e muito provavelmente ele citará Pitágoras. Esse famoso matemático grego, indiscutivelmente, mudou o mundo, pois suas descobertas permitiram que a geometria fosse separada da aritmética. O estudo do triângulo retângulo gera inúmeros problemas e resultados, historicamente desde antigas civilizações até os dias atuais, a humanidade dedicou esforços na tentativa de encontrar soluções de problemas práticos relacionados a medidas por meio do Teorema de Pitágoras.

No segundo capítulo é apresentado um breve histórico sobre o Teorema de Pitágoras. Existem evidências que indicam que os antigos babilônios conheciam o teorema cerca de mil anos antes da época de Pitágoras, e agrimensores egípcios mediam a terra, usando cordas e nós, recriando triângulos retângulos. Mas os gregos segundo a tradição histórica apresentada por Howard Eves, podem ter sido os primeiros a demonstrar de maneira geral o Teorema.

No terceiro capítulo são apresentados conceitos geométricos, os quais serão necessários nas demonstrações: Definições e elementos dos triângulos; Congruência de triângulos; Teorema de Tales; Desigualdade triangular; Semelhança de triângulos; Áreas.

Em geral, os livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio trazem apenas a demonstração via semelhança de triângulos, dessa forma no quarto capítulo são apresentadas algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras baseadas nos conceitos de decomposição de áreas, semelhança e congruência de polígonos, uma feita pelo Presidente dos Estados Unidos James Abram Garfield, recíprocas e generalização do teorema, e finalmente, algumas aplicações.

No quinto capítulo, são apresentados conceito de objetos de aprendizagem e uma aplicação, desenvolvida para introduzir fatos históricos, apresentar demonstrações lúdicas e propor desafios relacionados ao Teorema de Pitágoras. Aplicações em multimídia costumam ser utilizadas na escola para materializar conceitos e proporcionar melhor contextualização do ensino, nesse caso, propor uma abordagem moderna destas questões tradicionais.

Enfim, atualmente busca-se uma melhor compreensão do passado, do mundo e da vida, valorizando cada vez mais a matemática, pela sua relevância social e acadêmica, e seu domínio ser considerado fundamental e de grande aplicabilidade à tecnologia.

Dessa forma, esse estudo pretende contribuir para a reflexão sobre a temática *teorema de Pitágoras*, suas implicações e o desenvolvimento de um Objeto de Aprendizagem.

2 Um breve Histórico

2.1 Mesopotâmia (Babilônios)

Considerada o berço da civilização, a Mesopotâmia compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao território do Iraque e regiões adjacentes, Figura¹ 2.1. Dentre os reinos mesopotâmicos, Boyer (1974), Eves (2011), Roque (2012) e Mol (2013) destacam aquele baseado na cidade de Babilônia, por isso, há a convenção de se referir como babilônica à civilização mesopotâmica, ao menos no período de 2000 a.C. a 600 a.C..



Figura 2.1: Mapa da Antiga Babilônia

Assim como os egípcios, a geometria babilônica em seus primórdios esteve intimamente ligada com a mensuração prática na resolução de problemas do dia a dia.

Mol (2013, p. 14) destaca que a maneira de contar os dedos foi determinante na

¹Figuras: Todas as imagens deste documento são de domínio público adquiridas em repositórios como <http://wikimedia.org> ou <https://pixabay.com>. Algumas figuras foram criadas com software de geometria dinâmica pelo próprio autor.

escolha da base numérica adotada por estas civilizações. A base 10 usada no sistema de numeração, que hoje utilizamos e que era empregada pelos egípcios antigos, teria origem nos 10 dedos das mãos. A base 20, usada pelos maias pré-colombianos, teria sido motivada pelo uso dos 10 dedos das mãos e dos 10 dedos dos pés.

A contagem em dúzias, ou seja, na base 12, pode também ser vista como de natureza antropomórfica: em uma mão, o dedo polegar é usado para contar as 12 falanges dos outros quatro dedos. A possibilidade de contar 12 unidades em uma das mãos, conjugada com os cinco dedos da outra mão, pode estar na origem de sistemas de contagem na base 60, como era o sistema babilônico e ilustrado na Figura 2.2.

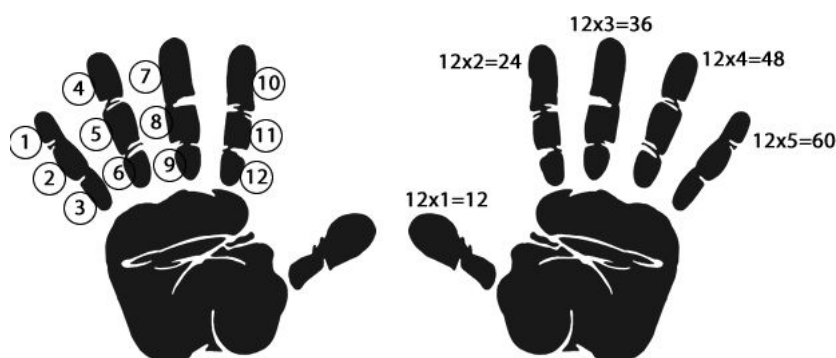


Figura 2.2: Contagem Babilônica

Os arqueólogos já descobriram mais de meio milhão de tábulas² de argila com escritas cuneiformes, mas segundo Boyer (1974, p. 20) e Roque (2012, p. 49) a maioria das tábulas encontradas são do período em torno do ano 1700 a.C., quando a matemática já era bastante desenvolvida. Segundo Eves (2011 p. 62), nesse período a civilização babilônica já estava familiarizada com as regras gerais da área de figuras como: retângulo, triângulo retângulo, triângulo isósceles (e talvez triângulo genérico) e trapézio retângulo.

Considerava-se a medida do comprimento de uma circunferência como o triplo de seu diâmetro (regra correta para $\pi = 3$). Os babilônios também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

Boyer (1974, p. 27) e Eves (2011, p. 64), concordam que os babilônios conheciam o Teorema de Pitágoras³ e abordavam-o de maneira algébrica, como evidencia a tábula Plimpton 322, catalogada sob o número 322 pela Universidade de Colúmbia, esse

²Tábulas de argila com escrita cuneiforme: Os museus de Paris, Berlim e Londres e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábulas. Alguns catálogos são online como o disponibilizado em <http://ccp.yale.edu/catalogue/>

³Teorema de Pitágoras: Em todo triângulo retângulo, a medida do quadrado da hipotenusa é igual a soma das medidas dos quadrados dos catetos.

artefato de barro trás essa relação gravada, Figura 2.3.

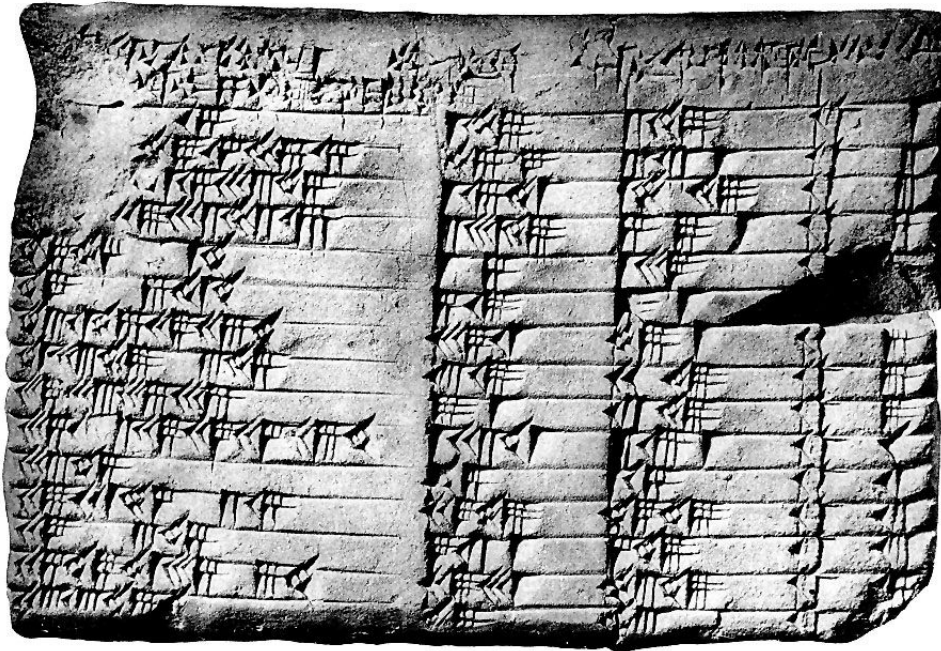


Figura 2.3: Tábula Plimpton 322

A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.). Contém três colunas praticamente completas de caracteres que, por conveniência, foram completadas e representadas na Tabela 2.1 em nossa notação decimal.

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Tabela 2.1: Representação da Plimpton 322 (Universidade de Colúmbia)

Há uma quarta, mas incompleta, coluna de caracteres ao longo do lado quebrado que completamos⁴. A grande maioria desses ternos, exceto os das linhas 11 e 15, são primitivos⁵. Assim (3,4,5) é um terno pitagórico primitivo, ao passo que (6,8,10) não é.

$$6 = 3 \times 2, 8 = 4 \times 2 \text{ e } 10 = 5 \times 2 \mid \text{fator comum é o } 2$$

Na tabela 2.1 há uma lista dos valores dos parâmetros u e v que levam a esses ternos pitagóricos. Historiadores como Eves, fundamentaram suas pesquisas alinhadas as ideias de autoridades como Otto Neugebauer⁶, sendo assim, acreditavam que os babilônios desse remoto período tinham consciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos como foi dada anteriormente.

Um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muitos séculos à tábula Plimpton 322, foi mostrar que todos os ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) são dados parametricamente por:

$$a = 2uv, b = u^2 - v^2 \text{ e } c = u^2 + v^2.$$

Entretanto, trabalhos inovadores como os de Robson⁷(2001) consideram evidências textuais, não só matemáticas, mas de outras manifestações que possam ajudar na compreensão da época estudada, transformaram de modo irreversível a imagem da matemática mesopotâmica, antes estudada por meio de reconstruções anacrônicas.

Compartilhando dessa nova abordagem, Roque (2012) sugere que as tábulas podem ora servir como "tabuadas", contendo resultados de operações, e outras tábulas contendo procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos.

Assim, os problemas anteriormente encarados como aritméticos pelos historiadores antigos, agora podem ser interpretados como problemas geométricos.

2.2 Egípcios

A antiga civilização egípcia desenvolveu-se no nordeste africano às margens do rio Nilo, milhares de anos antes de Cristo. Como a região é formada pelo deserto Saara, o vale do rio foi de extrema importância para a agricultura e a economia desse povo. Segundo relatos tradicionais, o historiador grego Heródoto (484-420 a.C.) atribuiu a

⁴Tabela: Representação da Plimpton 322 com dados em representação decimal e completados para análise e comparação. Observamos que no original há quatro erros na exibição dos ternos nas linhas 2, 9, 13 e 15, possivelmente gerados na transcrição.

⁵Ternos primitivos: Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno pitagórico é a unidade, então esse terno se diz primitivo.

⁶Otto Neugebauer: Renomado historiador matemático que publicou nos anos 1930 e 40 as primeiras traduções.

⁷Dra. Eleanor Robson é uma arqueologista especializada em história da ciência. Ela é a autora ou co-autora de diversos trabalhos sobre a cultura mesopotâmica e história da matemática.

origem da geometria egípcia à necessidade de, após cada inundação do rio Nilo, redistribuir campos cultiváveis a seus proprietários com a finalidade de diminuir as taxas de impostos aos prejudicados, conforme Roque (2012, p. 92).

A maioria dos autores como Boyer (1974), Eves (2011) e outros anteriores a estes, propõe que a matemática egípcia antiga se tratava de uma matemática essencialmente prática, baseada em métodos empíricos de tentativa e erro (método da falsa-posição⁸). Porém, numa análise mais aprofundada, segundo Roque (2012 p. 81), tal entendimento pode revelar um tipo de anacronismo. A busca de generalidade e universalidade que caracteriza a cientificidade das nossas práticas pode ser encontrada na matemática egípcia, mas de um modo distinto.

Até que se decifrassem tantas tábulas matemáticas babilônicas, o Egito foi por muito tempo o mais rico campo de pesquisas históricas sobre a Antiguidade e considerado erroneamente mais desenvolvido matematicamente. Mas a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica, talvez isso se deva ao fato da Babilônia ter alcançado maior desenvolvimento econômico, enquanto que o Egito se manteve em semi isolamento, segundo Eves (2011 p. 67).

As construções perenes de tumbas e templos, com paredes gravadas com ricas inscrições, e o clima seco da região foram determinantes na preservação de papiros. Muitos dos registros matemáticos dessa civilização, segundo Mol (2013), chegaram aos nossos dias em papiros que eram produzidos a partir do caule da planta de mesmo nome. Os papiros eram grafados por escribas em escrita hierática (formato cursivo e usada normalmente para fins comerciais), uma simplificação da escrita hieroglífica mais adequada a escrita corrente. Ambas eram compostas de símbolos, porém a escrita hieroglífica tinha caráter pictórico e era mais usada em monumentos, Figura 2.4.



Figura 2.4: Hieroglíficos

Boyer (1974) e Eves (2011) destacam algumas grandes fontes de informações que

⁸Método da falsa-posição é um método numérico usado para resolver equações lineares, partindo do pressuposto de que haja uma solução em um subintervalo. E assim, diminuindo esse subintervalo em partes cada vez menores, os valores sempre convergem para uma solução da equação.

possibilitaram a compreensão da matemática egípcia antiga, a Pedra da Roseta, o Papiro de Cairo, o Papiro de Moscou e o Papiro de Rhind⁹.

Em 1799, durante a campanha de Napoleão ao Egito, engenheiros franceses encontraram em Roseta¹⁰ um fragmento, conhecido hoje como a Pedra da Roseta, que iria propiciar a decifração dos caracteres hieroglíficos e demóticos. Essa pedra, que mede três pés e sete polegadas (109,2 cm) por dois pés e seis polegadas (76,2 cm), encontra-se exposta no Museu Britânico e contém inscrições com uma mensagem repetida em hieróglifos egípcios, em caracteres demóticos egípcios e em grego, Figura 2.5.

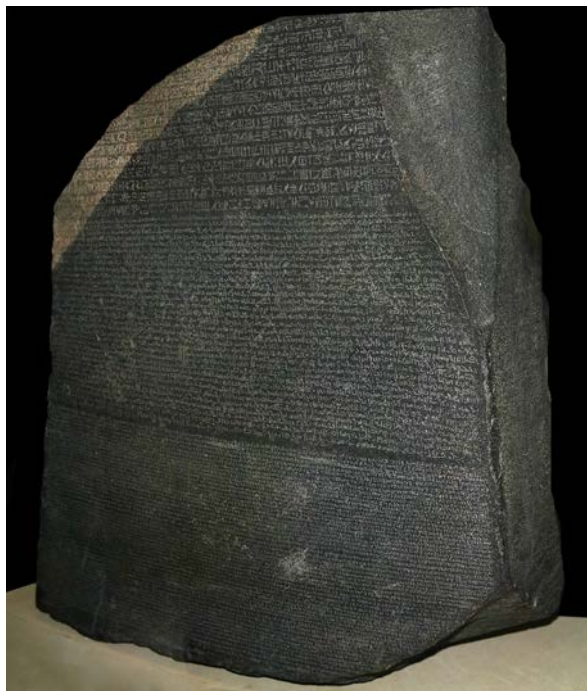


Figura 2.5: Pedra da Roseta

Jean François Champollion¹¹ utilizou o grego como chave para decifrar a escrita egípcia antiga. O sistema de numeração foi facilmente decifrado e o contexto matemático agora poderia ser confrontado. O papiro de Moscou contém 25 problemas matemáticos e foi adquirido pelo colecionador russo Golenischev em 1893, hoje se encontra no Museu de Belas-Artes de Moscou.

Então em 1858, um antiquário escocês, Alexander Henry Rhind, compra um papiro de 1650 a.C. que se tornaria uma das fontes primárias mais ricas em matemática egípcia antiga. O escriba Ahmes copiou esse documento que detalha a resolução de oitenta problemas matemáticos.

⁹O museu Britânico disponibiliza imagens dos papiros em <http://www.britishmuseum.org/>

¹⁰Roseta: Porto no mar Mediterrâneo, cidade que foi fundada por volta do ano 800 d.C..

¹¹Jean-François Champollion (1790-1832) foi um linguista, egiptólogo francês famoso do século XIX, sendo considerado o pai da egiptologia.

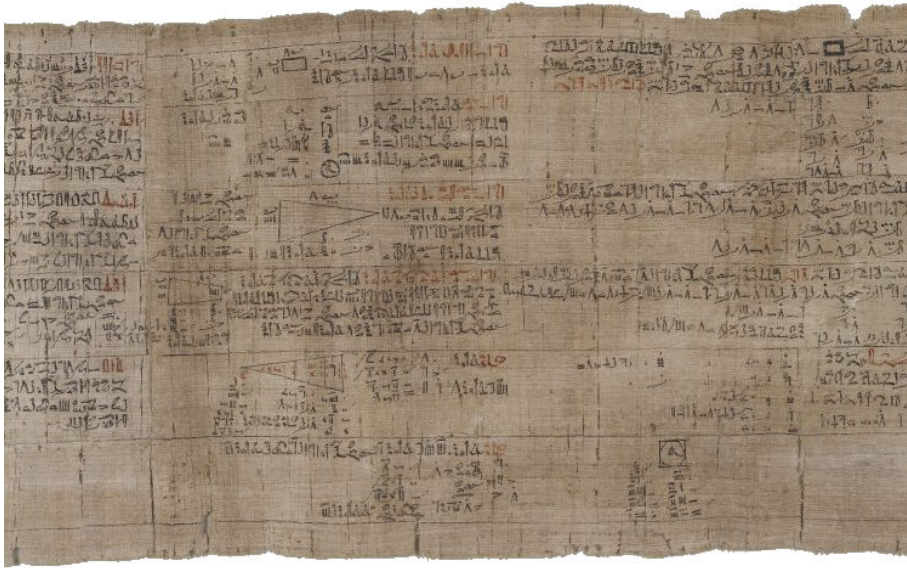


Figura 2.6: Papiro Rhind

Segundo Eves (2011, p. 86), os antigos agrimensores egípcios, do tempo dos faraós, construíam triângulos¹² (3,4,5) com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos. Essa técnica era empregada para medir áreas, terras férteis, que por razões óbvias eram muito valiosas.

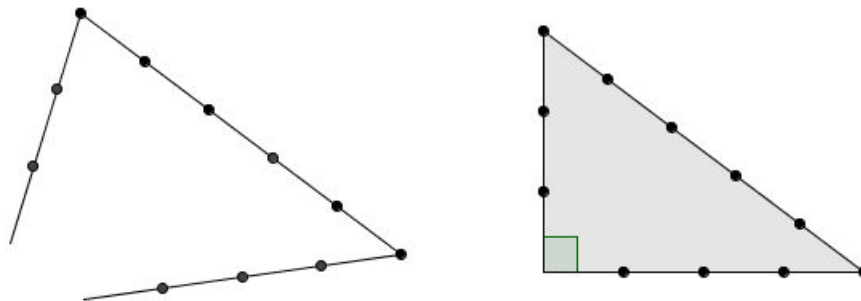


Figura 2.7: Corda Egípcia com 11 nós

O chamado papiro matemático Cairo foi encontrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro, que data de 300 a.C. aproximadamente, contém 40 problemas de matemática, 9 dos quais lidam exclusivamente com o Teorema de Pitágoras e mostra que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3,4,5 era retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5,12,13 e 20,21,29.

¹²Triângulos (3,4,5) são triângulos cuja medidas dos lados são iguais à 3, 4 e 5.

Exemplo 2.1. (Papiro Cairo) Problema proposto por Eves (2011, p. 87) Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança?

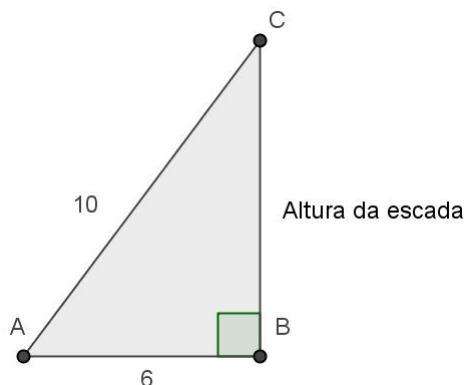


Figura 2.8: Problema do Papiro Cairo

2.3 Hindus

A Índia antiga quase sempre se compôs de um grande número de pequenos principados desunidos e sofreu com numerosas invasões. Os indianos dos primeiros tempos foram exterminados por invasores nômades por volta de 1500 a.C. e a região foi tomada pelos arianos que desenvolveram o hinduísmo¹³. Somente restos arqueológicos de algumas cidades evidenciam a existência desse povo que se situavam próximo à região de Mohenjo Daro e Harappa, segundo Eves (2011, p. 236).



Figura 2.9: Índia

¹³Hinduísmo é uma combinação de religião, filosofia e estrutura social que veio a formar a pedra angular da civilização hindu.

Pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática hindu antiga, em virtude da falta de registros históricos. A fonte histórica preservada mais antiga são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro. Vestígios indicam que essa civilização contava com uma matemática e uma engenharia tão avançada quanto qualquer outra do Oriente antigo, Eves (2011, p. 247).

As primeiras fontes do conhecimento matemático da Índia que dispomos são os Sulbasutras¹⁴ que são do período entre 800 a.C. e 500 a.C.. As figuras geométricas utilizadas para construir altares deveriam se ajustar a dimensões e áreas específicas. A orientação, as formas e as áreas tinham que obedecer uma rigorosa exatidão, e essa exatidão era tão importante quanto a pronúncia correta dos cânticos e recitais védicos, Gaspar (2015).

Em 1875, G. Thibaut traduziu uma grande parte dos Sulbasutras e mostrou que o conhecimento matemático dos sacerdotes hindus não era pequeno, e inclusive, conheciam o Teorema de Pitágoras. Os hindus relacionavam quadrados construídos sobre diagonal e lados de retângulos, e existe pelo menos três explicações de como os hindus descobriram o Teorema, Gaspar (2015).

1º Versão: (versão Baudhayana)

A corda que se estica no sentido da diagonal de um quadrado produz uma área de tamanho igual ao dobro da área do quadrado original.

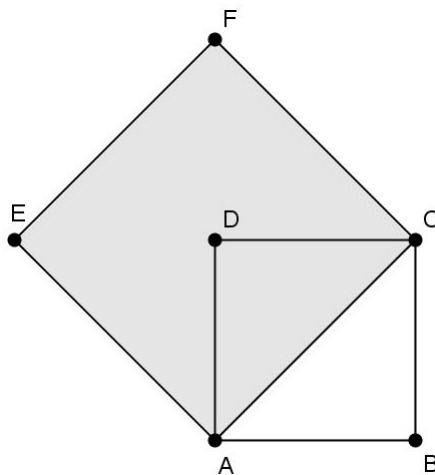


Figura 2.10: Quadrado versão Baudhayana

2ª Versão: (versão Katyayana)

A corda esticada ao longo do comprimento da diagonal de um retângulo produz ambos uma área igual à obtida conjuntamente pelos lados horizontais e verticais.

¹⁴Os Sulbasutras eram apêndices dos Vedas, conjunto de textos sagrados, e indicavam as regras para a construção de altares, os quais eram construídos seguindo medições precisas.

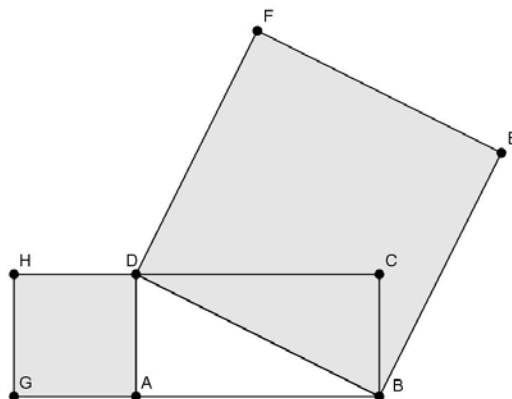


Figura 2.11: Retângulo versão Katyayana

Nas versões anteriores tratam de retângulos e não de triângulos retângulos. A primeira versão é relativa à quadrados e é mais específica, enquanto que a segunda versão refere-se ao caso geral. Por conta disso, Gaspar (2015) infere que há a possibilidade de ter ocorrido duas etapas na descoberta do Teorema pelos hindus.

A primeira explicação: Os hindus podem ter observado que o quadrado maior sobre a diagonal do quadrado menor pode ser dividido em quatro triângulos isósceles, cada um deles com a medida de área igual a metade da medida da área do quadrado menor, Figura 2.12.

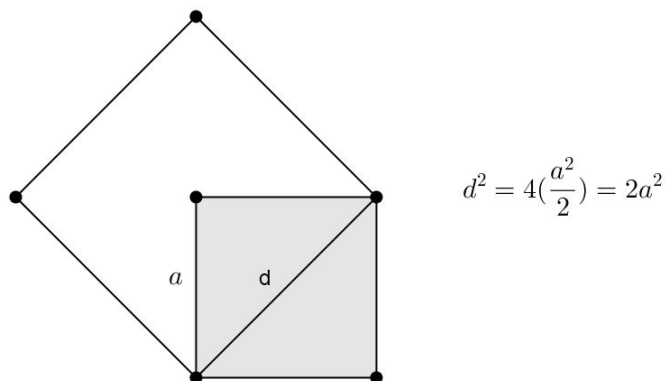


Figura 2.12: Primeira explicação: Descoberta hindu

A segunda explicação: A partir da construção do atman, que é um quadrado com medida igual a 4 *purushas*¹⁵ de área e é feito unindo quatro quadrados com medida igual a uma *purusha* de lado. Se traçarmos as diagonais (d_1 , d_2 , d_3 e d_4) dos quadrados menores como na seguinte Figura 2.13, formamos um quadrado que está dividido em quatro triângulos de área medindo meia *purushas*. Ao observar que o quadrado sobre a diagonal de um quadrado tem área igual ao dobro da medida da área desse quadrado, pode perceber o Teorema, segundo Gaspar (2015).

¹⁵Purusha: unidade de medida equivalente à altura de um homem em pé com os braços levantados.

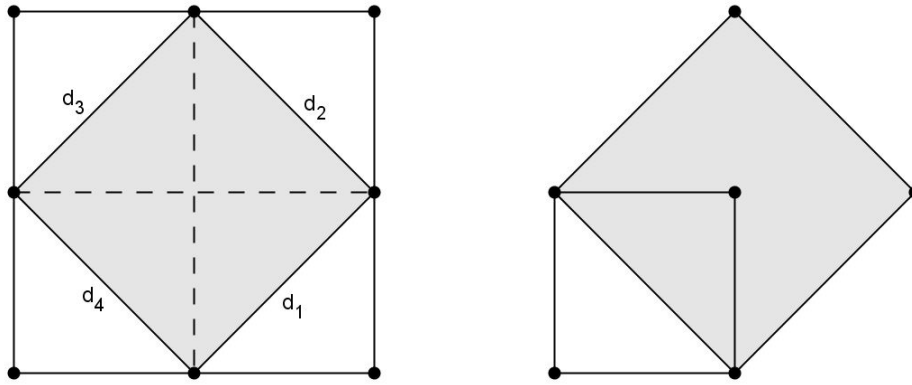


Figura 2.13: Segunda explicação: Descoberta hindu

A terceira explicação: Na construção do altar *paitrkyvedi*, que é feito a partir de um quadrado de duas *purushas* e as quinas do Vedi ficam sobre os pontos médios de lados. O diagrama da construção é o mesmo que da Figura 2.13, só que agora a construção se inicia pelo quadrado de lado 2 *purushas*.

Essas três explicações, podem estar relacionadas com a descoberta do Teorema de Pitágoras pelos indianos, segundo estudos de Gaspar (2015).

2.4 Gregos

As civilizações minoica e micênica foram as primeiras a ocupar a região da Grécia, entretanto foram exterminadas no período entre 1200 a.C. e 1150 a.C., por invasores bárbaros, os dórios, uma tribo aparentada com os arianos.



Figura 2.14: Grécia.

A escrita que havia desaparecida foi reintroduzida por volta de 800 a.C. pelos mercadores fenícios, segundo Eves (2011, p. 90). Boyer (1974, p. 33), exalta a capacidade e o empenho em aprender dos gregos pré-helênicos¹⁶. Apesar dos invasores não terem tradição com a escrita e desenvolvimento matemático, tiveram desejo em aprender e não demoraram a melhorar o que lhe ensinaram. Após aprenderem a escrita e a matemática com mercadores, estudiosos passaram a viajar até os grandes centros de cultura como Egito e Babilônia para se apropriar de mais conhecimento.

O período seguinte é conhecido como Helênico (compreendido entre 800 a.C. e 336 a.C.) pelos historiadores, apresentou um grande avanço científico e intelectual.

Tradicionalmente, conforme Roque (2012, p. 92), historiadores antigos sugerem que a prática da agrimensura dos egípcios teria dado origem à invenção da geometria¹⁷, um conhecimento que seria importado pelos gregos. Tales de Mileto (620 a.C. à 550 a.C.), matemático e filósofo, introduziu a geometria no território Grego. Nesse período houve uma transição da geometria empírica para a teórica, onde o foco passou a ser as demonstrações. Ainda como resquícios de uma abordagem desse conhecimento antigo, observamos a ideia da determinação de medidas inacessíveis. Por exemplo, na determinação da medida da altura de uma das pirâmides do Egito por Tales de maneira prática e aplicada.

A matemática sofreu uma mudança de rumo na Grécia Antiga, deixou de ser uma coleção de resultados empíricos e passou a ter o formato de uma ciência organizada, de maneira sistemática e por elementos racionais. Em outras palavras, a matemática através de demonstrações, passou a ser essencialmente abstrata, com uma certa independência em relação às aplicações práticas, conforme Mol (2013, p. 29).

Devemos ressaltar que os gregos se esforçavam em buscar maneiras de distinguir pensamentos falsos dos corretos, ou seja, estabeleciam critérios para decidir quem tinha razão. Filósofos como Sócrates e Aristóteles contribuíram para desenvolver um novo tipo de argumentação. A filosofia nasceu na Grécia, por volta do século VII a.C.. No entanto, a palavra filosofia¹⁸, inventada pelo filósofo Pitágoras de Samos, apareceu apenas no século V a.C., para designar um saber que havia se estruturado em função de princípios racionais, (FALABRETTI, OLIVEIRA, 2011 p. 24).

Nessa época, Tales de Mileto uniu o estudo da astronomia ao da geometria e da teoria dos números, fundando a chamada Escola Ioniana. Considerado o criador da geometria dedutiva, sendo a Tales atribuídas as primeiras demonstrações matemáticas que fundamentariam outros pensadores, Mol (2013, p. 32).

¹⁶Pré-Helênico é o período anterior ao helênico, antes de 800 a.C.

¹⁷Geometria: Vem do Grego geometria, *medida da terra*, de geo, *terra*, mais metrein, *medir* (de metron, *medida*). Essa matéria teve início a partir da necessidade de definir com precisão os terrenos cultiváveis, quando a espécie humana passou a se ocupar com a agricultura.

¹⁸*Philosophia* é composta por duas palavras: *Phília* (amor, amizade) e *Sophia* (sabedoria). Portanto etimologicamente, filosofia significa "amor, amizade pela sabedoria".

2.5 Pitágoras

As principais fontes de informações a respeito do início da matemática grega que relaciona Pitágoras são o chamado *De communi mathematica scientia* de Jâmblico¹⁹ e o *Sumário Eudemiano* de Proclo²⁰, segundo Eves (2011, p. 97) e Roque (2012, p. 102).

Pitágoras de Samos (572 a.C. - 496 a. C.), matemático grego nascido na ilha de Samos, parece que residiu por algum tempo no Egito e terminou por estabelecer-se na cidade de Crotona, na costa sudeste da Itália. Formou-se em torno de Pitágoras uma irmandade religiosa, filosófica e científica, uma escola de pensadores com elementos de misticismo, Eves (2011) e Mol (2013).

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico, segundo Eves (2011).

A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta do teorema sobre triângulos retângulos, conhecido universalmente pelo seu nome. Entretanto, esse teorema já era aplicado por civilizações anteriores à mais de um milênio antes dos primeiros trabalhos gregos nessa área serem desenvolvidos.

A primeira demonstração formal pode ter sido dada por Pitágoras e inclusive pode ter utilizado uma demonstração com decomposição como na Figura 2.15, segundo Eves (2011, p. 103). Mas Roque (2012, p. 112), reforça a tese que não há evidências que possam comprovar que realmente algum Pitagórico tenha demonstrado esse teorema.

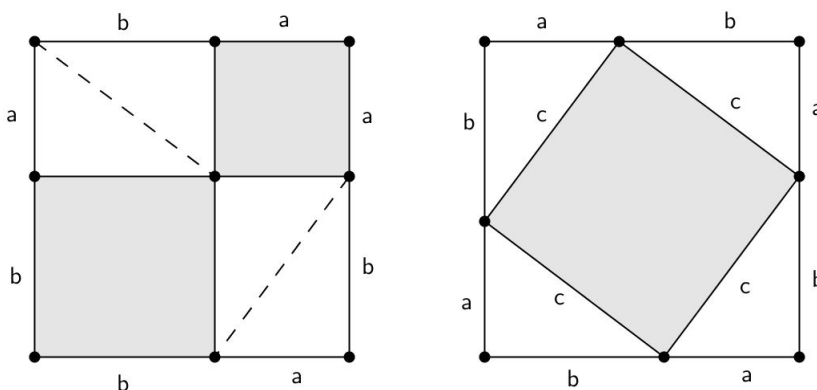


Figura 2.15: Primeira demonstração: Sugerida por Eves

A Figura 2.15, sugere ao retirar partes comuns (triângulos) que o quadrado maior tem a mesma área que a soma das áreas dos quadrados menores.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

¹⁹Jâmblico de Cálcils - (245 - 325 d.C.) Filósofo neoplatônico.

²⁰Proclo Lício (412 - 485 d.C.) Filósofo e matemático.

Os números inteiros são abstrações que surgem a partir da contagem, mas apenas com os números racionais damos conta da medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. Provavelmente para os antigos, todos os números poderiam ser representados pelos pontos da reta.

O Teorema de Pitágoras evidenciou que a medida da diagonal de um quadrado qualquer não podia ser expressa em termos de números inteiros, Figura 2.16. Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos e causou bastante desconforto nos pitagóricos, pois abalaria a filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros, segundo Eves (2011, p. 105). Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por números racionais.

$$d^2 = a^2 + a^2 \text{ então } d = a\sqrt{2}$$

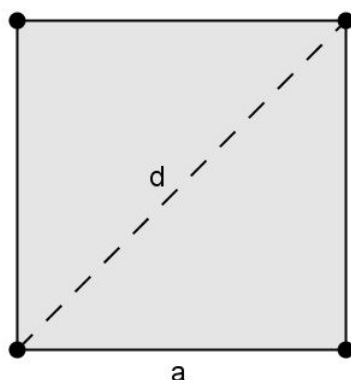


Figura 2.16: Quadrado com medida da diagonal igual à $\sqrt{2}$.

Então novos números tiveram de ser inventados para serem associados a esses pontos, chamamos de números irracionais (o que significa números não racionais).

Para provar que a diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser representado por racional, basta provar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Antes disso, observe que se $n \in \mathbb{Z}^+$ então n^2 , é par se e somente se, n for par.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ para a e b inteiros e primos entre si.

$$a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Como a^2 é o dobro de um número inteiro (b^2), concluímos que a^2 é par. Logo a é par.

Agora, considere $a = 2c$ e c inteiro, pois a é par.

$$a^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2$$

Logo b^2 é par, e portanto b é par. Absurdo, pois a e b são primos entre si, conclusão $\sqrt{2}$ não é racional.

3 Conceitos de Geometria

Considerando que o foco deste trabalho é o Teorema de Pitágoras, e que o mesmo trata de propriedades de triângulos, apresentaremos neste capítulo os conceitos básicos e essenciais de geometria plana, em especial a geometria dos triângulos com ênfase nas demonstrações. Para isso utilizaremos como referência os livros *Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana* de Osvaldo Dolce e José N. Pompeo; *Geometria: Coleção PROFMAT* de Antônio Caminha Muniz Neto.

A Geometria, como toda ciência, não surgiu de uma vez só, mas é fruto de uma grande evolução que teve sua origem na antiguidade e continua até os dias de hoje. Por isso, nossa proposta é mostrar parte, um ramo dessa evolução, até culminarmos no famoso Teorema de Pitágoras.

3.1 Triângulos: Definição e elementos

Definição 3.1. *Dados três pontos A , B e C não colineares, a reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} chama-se triângulo ABC (Figura 3.1).*

Notação: $\triangle ABC$, ou simplesmente ABC .

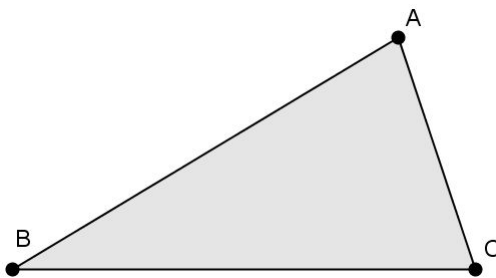


Figura 3.1: Elementos de um triângulo ABC

Elementos:

Vértices: os pontos A , B e C são os vértices de um triângulo ABC .

Lados: os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são chamados de lados do triângulo ABC .

Ângulos: os ângulos $B\hat{A}C$ ou \hat{A} , $A\hat{B}C$ ou \hat{B} e $A\hat{C}B$ ou \hat{C} são os ângulos internos do triângulo ABC .

3.2 Congruência de triângulos

Definição 3.2. Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

1. Lados correspondentes são congruentes;
2. Ângulos correspondentes são congruentes.

Esquema:

$$ABC \equiv A'B'C' \iff \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases} e$$

Vértices correspondentes: $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$.

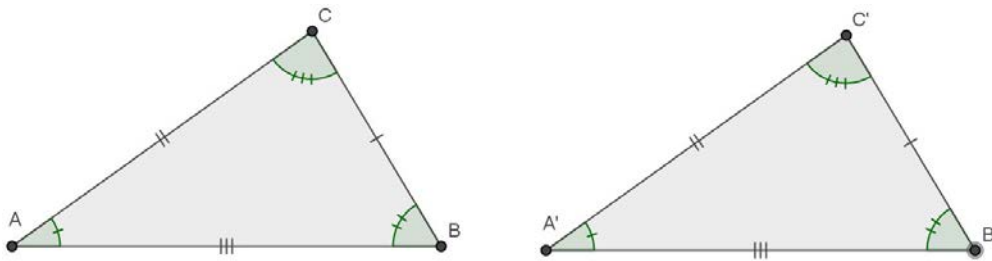


Figura 3.2: Triângulos $ABC \equiv A'B'C'$

Axioma 3.1. (Caso LAL de congruência de triângulos) Se dois triângulos têm dois lados correspondentes congruentes e também o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.

Esquema:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\implies} ABC \equiv A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{cases}$$

Proposição 3.1. (Caso ALA de congruência de triângulos) Se dois triângulos têm um lado e os dois ângulos adjacentes correspondentes congruentes, então estes triângulos são congruentes.

Demonstração. Hipótese: Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$.

Vamos provar que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$ para aplicarmos o axioma 3.1.

Para isso trace a semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ e um ponto $X \in \overrightarrow{B'A'}$, tal que:

$$\overline{BA} \equiv \overline{B'X} \tag{3.1}$$

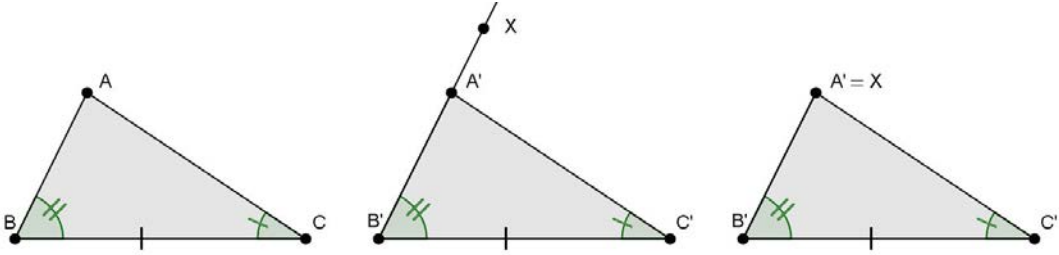


Figura 3.3: Caso de Congruência de triângulos ALA

Logo,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BA} \equiv \overline{B'X} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} ABC \equiv XB'C' \Rightarrow \widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'X} \quad (3.2)$$

Mas, por hipótese $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$ e pela equação 3.2 $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'X}$. Então, podemos afirmar que:

$$\widehat{B'C'A'} \equiv \widehat{B'C'X} \quad (3.3)$$

Portanto, pelas equações 3.1 e 3.3 podemos deduzir que $A' = X$

De $A' = X$, decorre que $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$

Podemos concluir pelo axioma 3.1 que

$$\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \text{ e } \overline{B'C'} \equiv \overline{BC} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} ABC \equiv A'B'C'$$

□

Proposição 3.2. (Caso LLL de congruência de triângulos) Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então eles são congruentes.

Demonstração. Hipótese: Sejam ABC e $A'B'C'$ dois Triângulos com $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

Considere o semiplano determinado pela reta AB e oposto ao vértice C . Neste semiplano construa um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ e $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D}$.

Então pelo axioma 3.1

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{DAB} \equiv \widehat{A'} \\ \overline{AD} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} ABD \equiv A'B'C'$$

Como $\overline{AD} \equiv \overline{A'C'} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{DB} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{BC}$, então os triângulos ACD e BCD são isósceles. Assim, os ângulos da base são congruentes:

$$\widehat{ACD} \equiv \widehat{ADC} \text{ e } \widehat{BCD} \equiv \widehat{BDC}$$

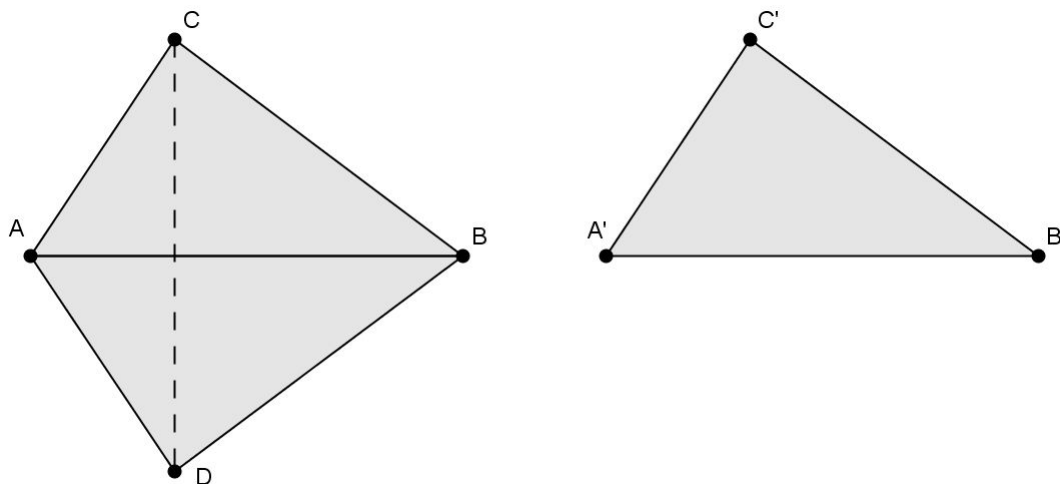


Figura 3.4: Caso de Congruência de triângulos LLL

Logo $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}$ e novamente pelo axioma 3.1

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} \equiv \overline{AD} \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} \\ \overline{BC} \equiv \overline{BD} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} ABD \equiv ABC$$

Concluimos que $ABC \equiv ABD \equiv A'B'C'$, ou simplesmente $ABC \equiv A'B'C'$. \square

3.3 Teorema de Tales

Tales de Mileto foi matemático, filósofo, engenheiro e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental. De ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 620 a.C. e faleceu aproximadamente em 550 a.C..

Para compreender a demonstração do Teorema de Tales, vamos inicialmente apresentar algumas definições e propriedades relevantes.

Definição 3.3. *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

Definição 3.4. *Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta contida no plano que contém o feixe e que concorre a todas as retas do feixe.*

Definição 3.5. *Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.*

Definição 3.6. *Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

Propriedade 3.1. Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e o segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:

1. Também é dividido em p partes;
2. Essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração.

1º caso: Sejam \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ segmentos correspondentes e suponha que \overline{AB} seja dividido em p partes por retas do feixe paralelo. Se $\overline{A'B'}$ ficasse dividido por menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas concorrerem em pontos de \overline{AB} (ou $\overline{A'B'}$), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.

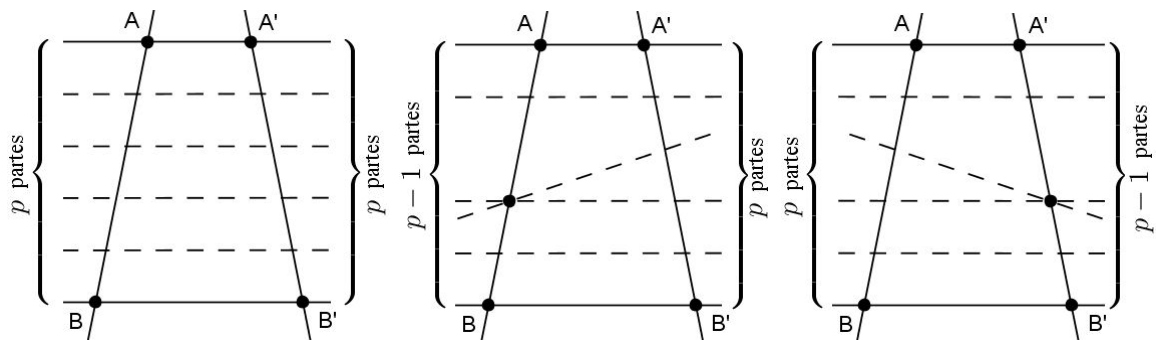


Figura 3.5: Segmentos correspondentes divididos

2º caso: \overline{AB} é dividido em partes congruentes a x .

Pelos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$, conduzindo paralelas a \overline{AB} , obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA (basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados receptivamente paralelos que são obtidos).

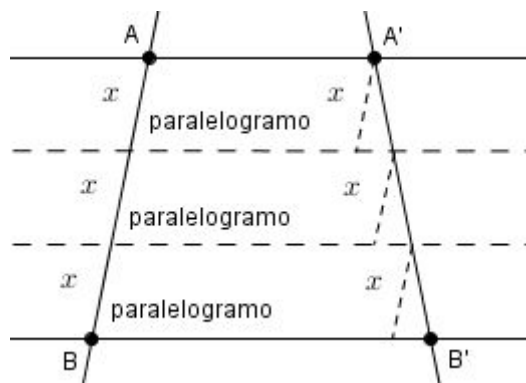


Figura 3.6: Transversais divididas em partes congruentes

Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

□

Teorema 3.1. (*Teorema de Tales*) *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra reta.*

O teorema afirma que, se \overline{AB} e \overline{CD} são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos segmentos correspondentes de outra transversal, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Demonstração. 1º caso \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos comensuráveis¹.

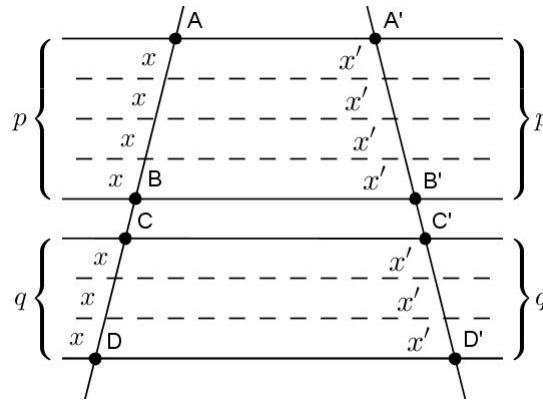


Figura 3.7: Segmentos comensuráveis

Existe um segmento x que é um submúltiplo de \overline{AB} e \overline{CD} . Ainda, se p e $q \in \mathbb{Q}$, então:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \quad (3.4)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de \overline{AB} e \overline{CD} , conforme a figura 3.7, e aplicando a propriedade 3.1, vem:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \quad (3.5)$$

Comparando as equações 3.4 e 3.5, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

2º caso \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos incomensuráveis.

Não existe um segmento submúltiplo de \overline{AB} e \overline{CD} .

¹Na geometria dizemos que dois segmentos são comensuráveis quando o quociente de suas medidas equivale a um número racional. De outra forma, pode-se dizer que duas medidas são comensuráveis se e somente se for possível expressar em uma mesma unidade de medida uma relação entre elas, como metade, dobro, triplo, etc.

Tomamos um segmento y submúltiplo de \overline{CD} , isto é:

$$\overline{CD} = ny \quad (3.6)$$

Como \overline{AB} e \overline{CD} são incomensuráveis, então para um certo número inteiro m acontece:

$$my < \overline{AB} < (m+1)y \quad (3.7)$$

Operando com as equações 3.6 e 3.7:

$$\left. \begin{array}{l} my < \overline{AB} < (m+1)y \\ ny = \overline{CD} = ny \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \quad (3.8)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão \overline{AB} e \overline{CD} e aplicando a propriedade 3.1.

$$\begin{aligned} \overline{C'D'} &= ny' \\ my' &< \overline{A'B'} < (m+1)y' \end{aligned}$$

Operando com as relações acima temos:

$$\left. \begin{array}{l} my' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \\ ny' = \overline{C'D'} = ny' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \quad (3.9)$$

Ora, y é um submúltiplo de \overline{CD} que pode variar, dividindo y , aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contínuas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela equação 3.8, e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela equação 3.9. Como o número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

A razão entre os segmentos correspondentes é constante.

□

3.4 Desigualdade triangular

Em todo triângulo, os comprimentos dos lados guardam uma certa relação, conhecida como *desigualdade triangular*. Inicialmente estabeleceremos uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos.

Proposição 3.3. (*Teorema do Ângulo Externo*) *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Seja \widehat{ACX} um ângulo externo de ABC , conforme Figura 3.8. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , então $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

$$\widehat{ACX} = 180^\circ - \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

□

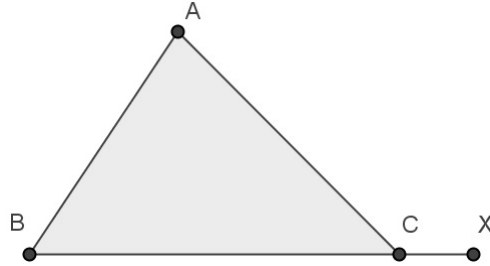


Figura 3.8: Teorema do Ângulo Externo

Proposição 3.4. Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Demonstração. Como $\widehat{B} > \widehat{C}$, podemos traçar a semirreta \overrightarrow{BX} , intersectando o interior de ABC e tal que $\widehat{CBX} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$. Sendo P o ponto de interseção de \overrightarrow{BX} com o lado \overline{AC} , segue do teorema do ângulo externo que

$$\widehat{APB} = \widehat{CBP} + \widehat{BCP} = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}) + \widehat{C} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$$

Mas, como $\widehat{ABP} = \widehat{B} - \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}) = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$, segue que o triângulo ABP é isósceles de base \overline{BP} .

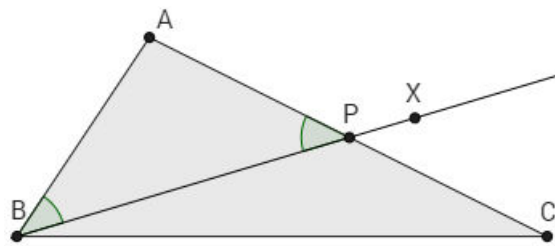


Figura 3.9: Ordem dos lados e ângulos de um triângulo

Portanto, $\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}$ ou $\overline{AB} < \overline{AC}$. □

Corolário 3.1. Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{A} \geq 90^\circ$, então \overline{BC} é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o maior lado.

Demonstração. Se $\widehat{A} \geq 90^\circ$, então \widehat{A} é o maior ângulo de ABC , de modo que \overline{BC} é, pela proposição 3.4, o maior lado. □

Proposição 3.5. *Desigualdade Triangular. Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Marque D sobre a semirreta \overrightarrow{CA} tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$.

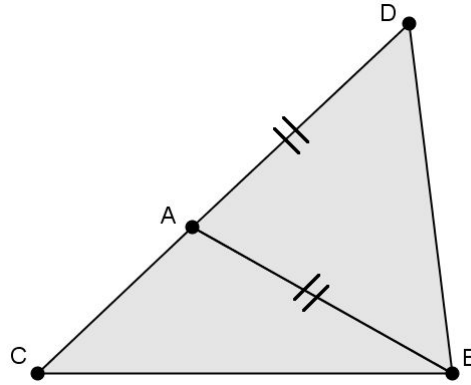


Figura 3.10: Desigualdade Triangular

Considere,

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} \quad (3.10)$$

Note que $\widehat{D\hat{B}A} < \widehat{D\hat{B}A} + \widehat{A\hat{B}C}$ e como ABD é isósceles, segue que $\widehat{B\hat{D}A} \equiv \widehat{D\hat{B}A}$. Logo, $\widehat{B\hat{D}C} = \widehat{B\hat{D}A} = \widehat{D\hat{B}A} < \widehat{D\hat{B}A} + \widehat{A\hat{B}C} = \widehat{D\hat{B}C}$

$$\widehat{B\hat{D}C} < \widehat{D\hat{B}C} \quad (3.11)$$

Pela proposição 3.4 e pela desigualdade 3.11, concluímos que $\overline{CB} < \overline{CD}$, ou seja, $\overline{CB} < \overline{AB} + \overline{AC}$ pela equação 3.10.

Sendo a prova dos outros casos análoga. \square

3.5 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja constante. Ou seja, $ABC \sim A'B'C'$ com correspondência $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, se:

$$\begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \text{ e } \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \end{cases}$$

Tal real positivo k é denominado razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$.

As três proposições a seguir estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão, as mesmas são conhecidas como os casos de semelhança de triângulos.

Proposição 3.6. (Caso AA de semelhança de triângulos) *Se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.*

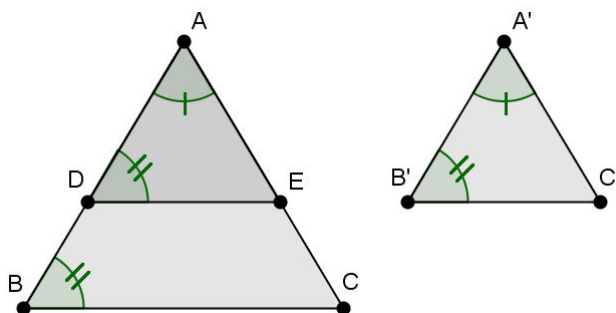


Figura 3.11: Caso de semelhança AA

Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, e sem perda de generalidade, considere $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Seja D um ponto de AB tal que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE com $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$ e E no lado AC . Então tem-se:

$\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e $\widehat{D} \equiv \widehat{B}'$, pela proposição 3.1, $ADE \equiv A'B'D'$

$\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ e $\widehat{B}' \equiv \widehat{D} \Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{D} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow ABC \sim ADE$

Concluimos, $ABC \sim A'B'C'$ □

Proposição 3.7. (Caso LLL de semelhança de Triângulos) *Se dois triângulos tem os três lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.*

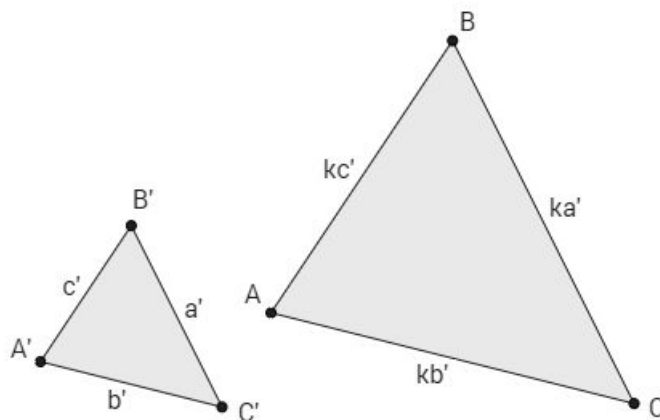


Figura 3.12: Caso de Semelhança LLL

A partir da definição de semelhança de triângulos, para demonstrar esta proposição basta mostrar que os ângulos são congruentes. Ou seja, se ABC e $A'B'C'$ triângulos do plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$ com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Se $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C}'$.

Demonstração. Sendo k o valor comum das razões do enunciado, temos $\overline{AB} = k(\overline{A'B'})$, $\overline{BC} = k(\overline{B'C'})$ e $\overline{AC} = k(\overline{A'C'})$.

O caso $k = 1$ é trivial já que os triângulos são congruentes.

Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$ e marque o ponto $B'' \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$.

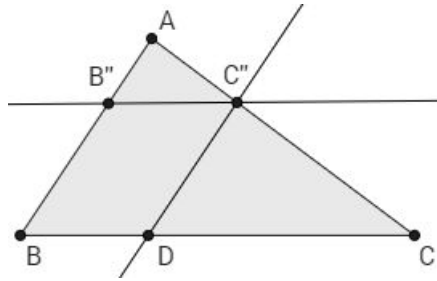


Figura 3.13: Prova do Caso de Semelhança LLL

Sendo C'' a interseção com o lado \overline{AC} da reta que passa por B'' e é paralela ao lado \overline{BC} , segue do teorema de Tales que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = k,$$

logo $k(\overline{AC''}) = \overline{AC} = k(\overline{A'C'})$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'} \quad (3.12)$$

Agora, trace a paralela ao lado \overline{AB} passando por C'' , a qual intersecta o lado \overline{BC} no ponto D . Então, o quadrilátero $B''C''DB$ é um paralelogramo. Novamente pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}} = k,$$

então $k(\overline{B''C''}) = \overline{BC} = k(\overline{B'C'})$

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'} \quad (3.13)$$

Pelas igualdades 3.12 e 3.13, mostramos que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ e $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$, ou seja, os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso *LLL* de congruência. Portanto:

$$\widehat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{A'B''C''} = \widehat{A'B'C'} = \widehat{B'},$$

e, analogamente, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

□

3.6 Áreas

Área é a medida de uma superfície. Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

Proposição 3.8. *Um quadrado de lado com medida l tem a medida da área igual a l^2 .*

$$A(ABCD) = l^2$$

Proposição 3.9. *Um retângulo com medidas de lados iguais a a e b tem a medida da área igual a ab .*

$$A(EFGH) = ab$$

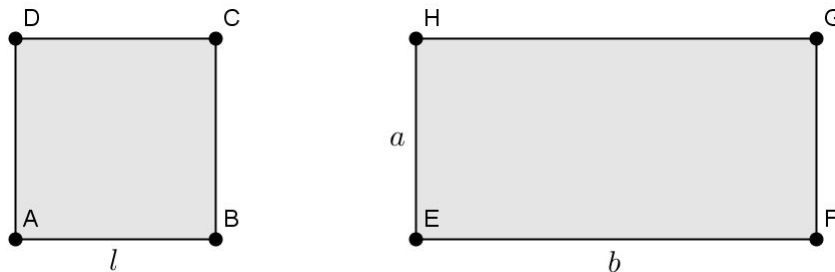


Figura 3.14: Área: Quadrado e Retângulo

Proposição 3.10. *A medida da área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah .*

$$A(ABCD) = ah$$

Demonstração. Consideremos o paralelogramo $ABCD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, conforme a figura 3.15. Sejam respectivamente os pontos E e F os pés das perpendiculares baixadas a partir dos pontos D e C à reta AB e suponha, sem perda de generalidade, que $E \in AB$.

É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso ALA, proposição 3.1.

$$\widehat{A} \equiv \widehat{B}, \overline{AD} \equiv \overline{BC} \text{ e } \widehat{D} \equiv \widehat{C}$$

Portanto, $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$ o que implica em $A(ADE) = A(BCF)$. Então temos:

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ADE) + A(BEDC) \\ &= A(BCF) + A(BEDC) \\ &= A(EFCD) \end{aligned}$$

Por outro lado, $EFCD$ é um retângulo de altura h e base \overline{EF} .

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a$$

Concluimos que $A(ABCD) = A(EFCD) = ah$.

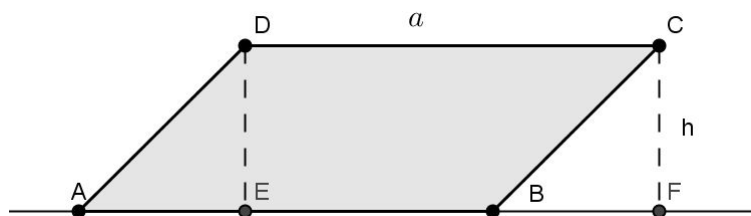


Figura 3.15: Área: Paralelogramo

□

Proposição 3.11. *A medida da área de um triângulo com medida da base igual a b e medida da altura relativa á base igual a h é igual a $\frac{bh}{2}$.*

$$A(ABC) = \frac{bh}{2}$$

Demonstração. Seja D a interseção da paralela a reta BC por A com a paralela a AB por C , conforme figura 3.16. É imediato verificar que $ABCD$ é um paralelogramo com medida de área igual ao dobro da medida da área do triângulo ABC .

Verificamos pelo caso de congruência ALA, proposição 3.1, que $ABC \equiv ACD$, pois $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD}$, \overline{AC} é lado comum e $\widehat{ACB} \equiv \widehat{CAD}$ (ângulos alternos internos).

Portanto, $2A(ABC) = A(ABCD) = bh$, ou seja:

$$A(ABC) = \frac{bh}{2}$$

□

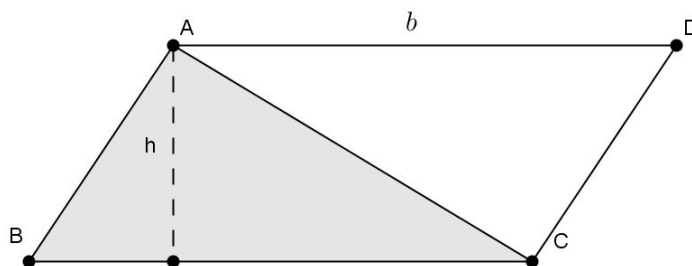


Figura 3.16: Área: Triângulo

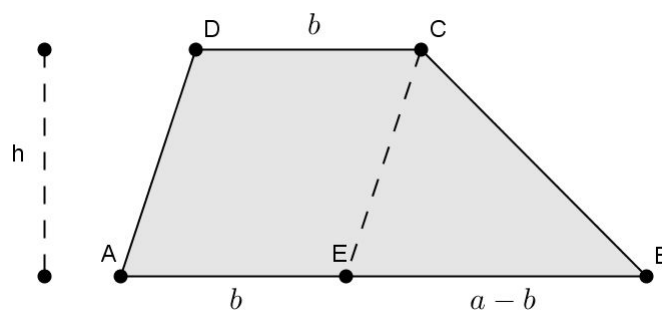


Figura 3.17: Área: Trapézio

Proposição 3.12. Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e altura h , então:

$$A(ABCD) = \frac{(a+b)h}{2}$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $a > b$ conforme figura 3.17. Se $E \in AB$ for tal que $\overline{AE} = b$, então o quadrilátero \overline{AECD} tem dois lados paralelos e iguais, de modo que é um paralelogramo. Como $\overline{BE} = a - b$, temos

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(AECD) + A(EBC) \\ &= bh + \frac{(a-b)h}{2} = \frac{(a+b)h}{2} \end{aligned}$$

□

4 Teorema de Pitágoras

Muitos dos triângulos encontrados na prática não são retângulos, de modo que num primeiro momento as aplicações do Teorema de Pitágoras podem parecer limitadas. Entretanto, qualquer triângulo pode ser dividido em outros dois triângulos retângulos, conforme pode ser observado na Figura 4.1, onde nota-se que um triângulo ABC qualquer pode ser dividido pela altura \overline{NB} em dois triângulos retângulos (ABN e BCN são retângulos).

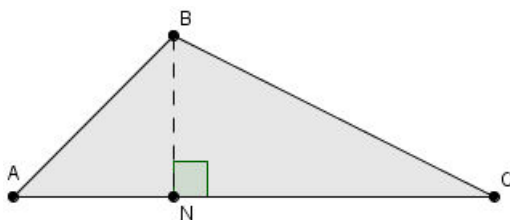


Figura 4.1: Triângulo qualquer.

Na história da Matemática, muitas foram as demonstrações do Teorema de Pitágoras. Vejamos algumas demonstrações e resultados relativo a este teorema.

Teorema 4.1. (*Teorema de Pitágoras*) Num triângulo retângulo a medida da hipotenusa¹ ao quadrado é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos².

$$a^2 = b^2 + c^2$$

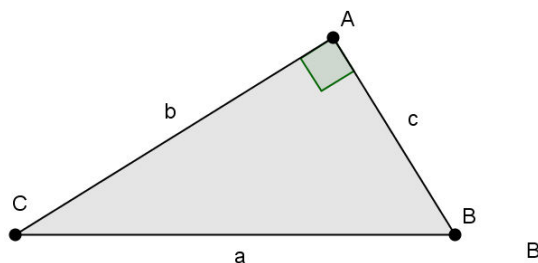


Figura 4.2: Triângulo retângulo.

¹Hipotenusa: Lado maior do triângulo retângulo, oposto ao ângulo reto.

²Catetos: Lados menores do triângulo retângulo, sendo que o maior é a hipotenusa.

4.1 Demonstração por semelhança de triângulos

Uma das demonstrações mais utilizadas em livros didáticos para demonstrar o teorema 4.1 (Teorema de Pitágoras), utiliza semelhança de triângulos. Dante (2012, p. 213) utiliza esse tipo de demonstração inclusive para determinar outras relações métricas.

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC , retângulo em \hat{A} , com altura \overline{AH} relativa à hipotenusa \overline{BC} , conforme Figura 4.3.

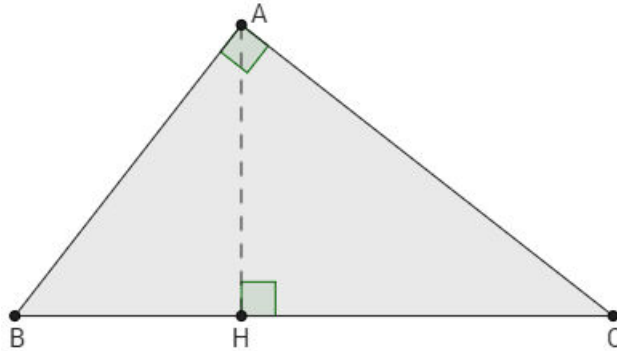


Figura 4.3: Triângulo ABC .

Note que $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$.

Vamos considerar os triângulos HBA e ABC .

Os dois triângulos têm um ângulo reto (são ambos triângulo retângulos) e têm o ângulo \hat{B} comum. Logo pela proposição 3.6 (caso AA de semelhança de triângulos) temos $ABC \sim HBA$.

Como são semelhantes, os lados homólogos³ são proporcionais:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}$$

Dessas proporções, deduzimos as equações:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \quad (4.1)$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \quad (4.2)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{BH} \quad (4.3)$$

Agora, vamos considerar os triângulos ABC e HAC .

Esses dois triângulos têm ângulos retos, e o ângulo \hat{C} é comum, portanto, pela proposição 3.6 (caso AA de semelhança de triângulos) temos $ABC \sim HAC$.

³Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.

Como os lados correspondentes são proporcionais, obtemos as relações:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$$

Dessas proporções, deduzimos as equações:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC} \quad (4.4)$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AH} = \overline{HC} \cdot \overline{AB} \quad (4.5)$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} \quad (4.6)$$

Somando as equações 4.1 e 4.4.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} + \overline{BC} \cdot \overline{HC} = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{HC})$$

Como $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$, então:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

Ou seja, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. □

Corolário 4.1. *O quadrado da medida do cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.*

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \text{ e } \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC}$$

Demonstração. Deduzido diretamente das equações 4.1 e 4.4. □

Corolário 4.2. *Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.*

Demonstração. Deduzido diretamente das equações 4.2 e 4.6. □

4.2 Caso particular: Triângulo retângulo de lados medindo 3, 4 e 5

Proposição 4.1. *Num triângulo retângulo com medidas dos catetos iguais à 3 e 4, a medida da hipotenusa é igual à 5.*

Evidentemente se utilizarmos o Teorema de Pitágoras é imediata a solução.

Demonstração. Seja o triângulo ABC tal que a medida da hipotenusa é igual a a . Pelo teorema 4.1 é fácil verificar que

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = 5.$$

□

Eves (2011, p. 86) desafia: Mostrar, sem usar o teorema de Pitágoras, que o triângulo (3,4,5) é retângulo.

Intuitivamente: O triângulo retângulo (3,4,5) pode ser construído numa malha quadriculada, conforme a Figura 4.4. Contando os *quadrados* (quadrados de lado unitário) em cada quadrado apoiado num lado do triângulo, encontramos 9, 16 e 25 *quadrados* (área).

Como $9 + 16 = 25$, concluímos que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior.

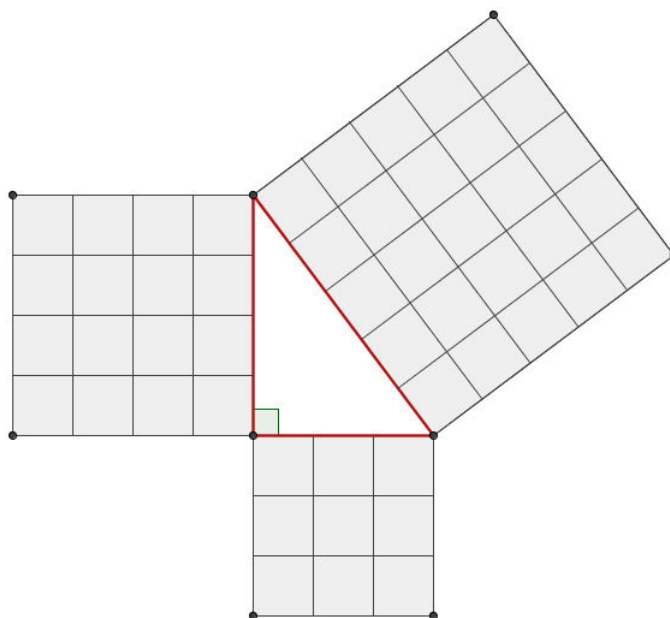


Figura 4.4: Triângulo de lados 3, 4 e 5

Este argumento acima não é válido como uma demonstração formal, apesar de ser muito utilizado em livros didáticos como Dante (2012, p. 212).

4.3 Caso particular: Chou-pei

Segundo Barbosa (1993), um quadriculado encontrado no Chou-pei, o mais antigo trabalho matemático chinês, nos mostra que todo triângulo retângulo cuja as medidas dos catetos são 3 e 4 possui uma hipotenusa com medida igual a 5, ou seja, propõe uma demonstração para a proposição 4.1.

Construa a figura 4.5, o quadriculado de Chou-peí.

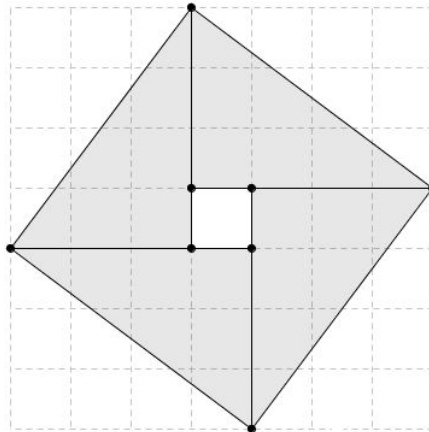


Figura 4.5: Quadriculado Chou-peí

Demonstração. Cada triângulo retângulo (3,4,5) contido na figura possui catetos com medidas iguais a 3 e 4, logo tem área igual a 6. A área do quadradinho central é igual a 1.

Portanto o quadrado maior tem a medida da área igual a soma dos 4 triângulos mais a área do quadradinho.

$$4 \times 6 + 1 = 25$$

A medida da hipotenusa do triângulo (3,4,5) é igual a medida do lado do quadrado maior que é igual a 5. \square

4.4 Caso particular: Triângulo retângulo isósceles

Para quaisquer triângulos retângulos isósceles podemos, por construção, traçar três quadrados pelos lados do triângulo conforme a Figura 4.6. A soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual a medida da área do quadrado maior.

Teorema 4.2. *Ao redor de um triângulo retângulo isósceles central com quadrados concorrendo os lados, a área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos quadrados menores.*

Demonstração. A partir de um triângulo retângulo isósceles, construa quadrados sobre os lados do triângulo, conforme Figura 4.6.

Ao traçar as diagonais do quadrado maior determinaremos 4 triângulos isósceles, todos congruentes ao triângulo central pela proposição 3.1 (caso ALA de congruência de triângulos). A área do quadrado maior tem medida igual a quatro vezes a medida da área do triângulo central.

Ao traçar as diagonais dos quadrados menores determinaremos 2 triângulos isósceles em cada quadrado, todos congruentes ao triângulo central pela proposição 3.1 (caso

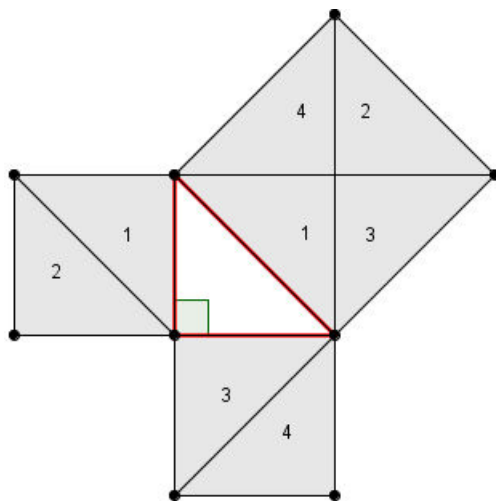


Figura 4.6: Triângulo isósceles

ALA de congruência de triângulos). A área do quadrado menor tem medida igual ao dobro da medida da área do triângulo isósceles central.

Concluimos que a soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual a medida do quadrado maior. \square

4.5 Demonstração por Bhaskara

Da Figura 4.5 Chou-pei podemos, de maneira geral, provar o teorema 4.1 (Teorema de Pitágoras) como sugeriu o próprio Bhaskara através da Figura 4.7 agora generalizando o triângulo, Barbosa (1993).

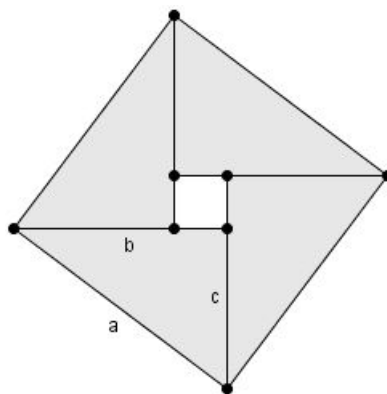


Figura 4.7: Triângulo de Bhaskara.

Demonstração. Construa quatro triângulos retângulos com hipotenusa a e catetos b e c , e disponha-os conforme mostrado na Figura 4.7. Observe que no interior, ao centro, encontra-se um quadrado de lado igual a $b - c$.

Temos que a área do quadrado de lado a é igual a soma das áreas dos quatro triângulos mais o quadrado central de lado $b - c$:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4 \frac{bc}{2}$$

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

□

4.6 Demonstração de Garfield

James Abram Garfield, foi presidente dos Estados Unidos em 1881, demonstrou o Teorema de Pitágoras com um trapézio enquanto ainda estava na Câmara de Representantes (Câmara do Congresso dos Estados Unidos), Barbosa (1993) e Dante (2012).

Demonstração. Considere o trapézio da figura 4.8. A área do trapézio T é igual a soma das áreas dos três triângulos retângulos.

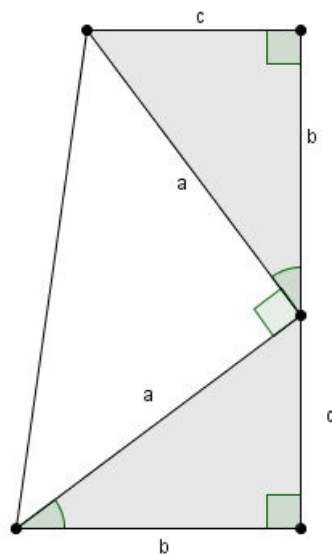


Figura 4.8: Triângulo de Garfield

A medida da área do trapézio, pela proposição 3.12 é igual a:

$$T = \frac{(b + c)}{2}(b + c) = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2}$$

A soma das medidas das áreas dos triângulos, pela proposição 3.11 é igual a:

$$T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

Comparando e multiplicando por 2.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

□

4.7 Demonstração por decomposição

Demonstração por decomposição é uma possível demonstração atribuída ao próprio Pitágoras, segundo Eves (2011, p. 103).

Utilizando conceitos de comparação de áreas de figuras geométricas, podemos subtrair a área de quatro triângulos retângulos para comparar áreas de quadrados.

Demonstração. Considere dois quadrados, ambos com lados iguais a $(b + c)$, conforme Figura 4.9.

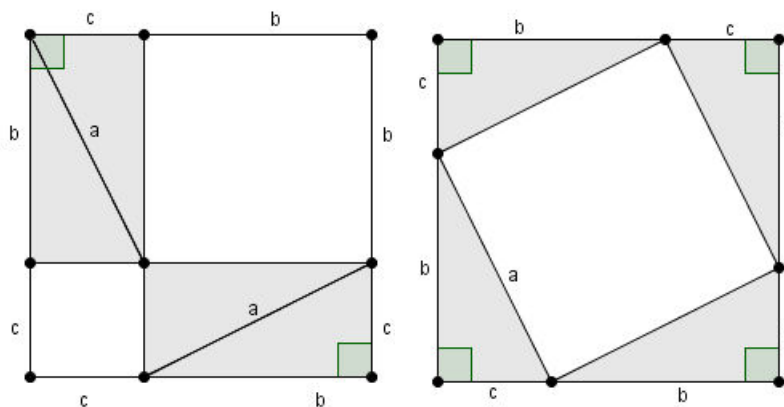


Figura 4.9: Decomposição

O primeiro quadrado (da esquerda) é composto por seis figuras: um quadrado de lado b , um quadrado de lado c e quatro triângulos retângulos de catetos b e c .

Logo, a área desse quadrado é igual a

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 4\frac{bc}{2} \quad (4.7)$$

O segundo quadrado (da direita) é composto por cinco figuras: um quadrado de lado a e quatro triângulos retângulos de catetos b e c .

Logo, a área desse quadrado é igual a

$$(b + c)^2 = a^2 + 4\frac{bc}{2} \quad (4.8)$$

Comparando as áreas, igualando as equações 4.7 e 4.8, temos:

$$b^2 + c^2 + 4\frac{bc}{2} = a^2 + 4\frac{bc}{2}$$

Subtraindo a medida da área dos triângulos $4\frac{bc}{2}$ dos dois membros da equação, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a^2 \text{ ou } a^2 = b^2 + c^2$$

□

4.8 Recíproca do Teorema de Pitágoras

Se as medidas dos lados de um triângulo a , b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo será o triângulo retângulo de lados a , b , e c ? Intuitivamente, acreditamos que sim. Mas, devemos demonstrar isto, Barbosa (1993, p.23) e Wagner (2010, p. 8).

Proposição 4.2. (Recíproca do Teorema de Pitágoras) *Se em um triângulo o quadrado da medida de um lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o ângulo oposto é reto.*

Demonstração. (WAGNER, 2010) Consideremos então um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

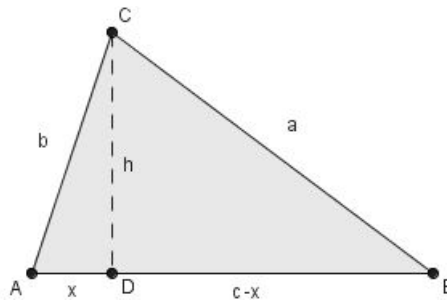


Figura 4.10: 1º caso: Recíproca do Teorema de Pitágoras

1º caso: $A < 90^\circ$.

Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D , projeção de C sobre \overline{AB} , pertence ao interior do lado \overline{AB} . Sejam $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$.

Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Portanto

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

2º caso: $A > 90^\circ$.

Agora, o ponto D não pertence ao lado \overline{AB} .

Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$, ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos então que em um triângulo ABC , de lados a , b e c ,

$$A < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\hat{A} = 90^\circ$. □

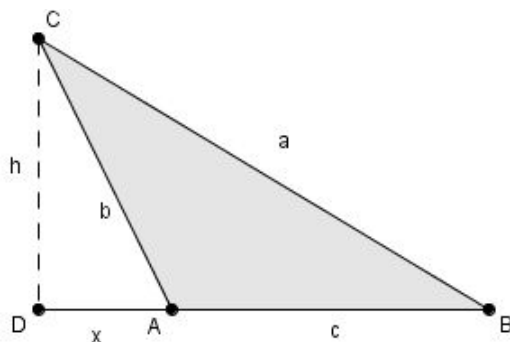


Figura 4.11: 2º caso: Recíproca do teorema de Pitágoras

Demonstração. (BARBOSA, 1993) Consideremos um triângulo BAC , conforme Figura 4.12, para o qual temos por hipótese, $a^2 = b^2 + c^2$.

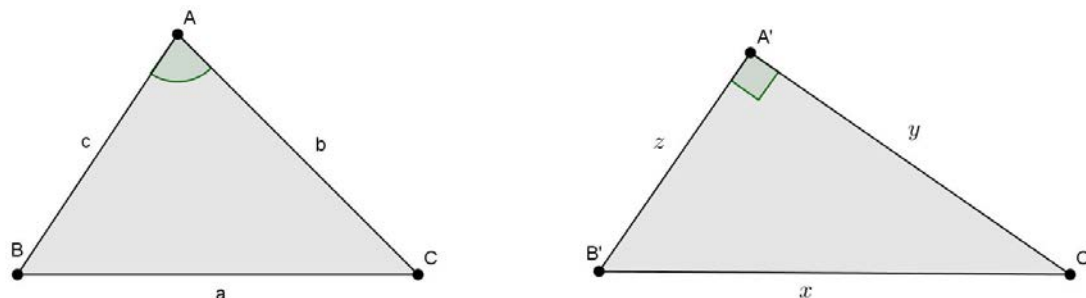


Figura 4.12: demonstração recíproca do Teorema de Pitágoras

Consideremos um outro triângulo $B'A'C'$ retângulo em \widehat{A}' , de catetos com medidas y e z , e hipotenusa medindo x , mas com $y = b$ e $z = c$.

Pelo teorema 4.1 temos $x^2 = y^2 + z^2$, portanto $x^2 = b^2 + c^2$ e comparando com a hipótese temos $x^2 = a^2$ ou $x = a$.

Segue que o segundo triângulo é congruente ao primeiro pela proposição 3.2 e, portanto, em consequência $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, ou seja, o ângulo \widehat{A} é reto.

□

4.9 Generalizando: Teorema para figuras semelhantes quaisquer

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Mas podemos generalizar o teorema para quaisquer figuras semelhantes, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, Barbosa (1993) e Wagner (2010).

Lema 4.1. *Se dois triângulos são semelhantes, então possuem as áreas proporcionais aos quadrados dos comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.*

Demonstração. Sejam ABC e MNP semelhantes, \overline{AD} e \overline{MH} alturas relativas aos lados correspondentes \overline{BC} e \overline{NP} respectivamente.

Sendo os triângulos semelhantes

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} \quad (4.9)$$

As áreas T_1 e T_2 das figuras são iguais a

$$T_1 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} \text{ e } T_2 = \frac{\overline{NP} \cdot \overline{MH}}{2}$$

Dividindo as áreas

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{NP} \cdot \overline{MH}}$$

Usando agora a equação 4.9

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BC}}{\overline{NP} \cdot \overline{NP}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{NP}^2}$$

□

Lema 4.2. *Se dois polígonos são semelhantes, então possuem as áreas proporcionais aos quadrados das medidas de dois lados correspondentes quaisquer.*

Demonstração. Sejam dois polígonos semelhantes de áreas P_1 e P_2 .

Com as diagonais obtemos triângulos semelhantes (decomposição). Logo seus quadrados T_n também são proporcionais pelo lema 4.1, ou seja, $\frac{T_1}{T_2} = k^2$.

S_1 e S_2 são iguais as somas de todas as medidas das áreas dos triângulos das decomposições dos polígonos, então:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

□

Lema 4.3. *Dois pares de figuras semelhantes possuem proporção entre as áreas, desde que tenham lados homólogos com medidas iguais.*

Demonstração. Consideremos dois polígonos semelhantes com medidas de áreas iguais a P_1 e P'_1 com x e y medidas de lados homólogos, e outros dois polígonos P_2 e P'_2 com x' e y' medidas de lados homólogos, mas $x = x'$ e $y = y'$

Pelo lema 4.2

$$\frac{P_1}{P'_1} = \frac{x^2}{y^2} \text{ e } \frac{P_2}{P'_2} = \frac{x^2}{y^2} \text{ portanto } \frac{P_1}{P'_1} = \frac{P_2}{P'_2}$$

□

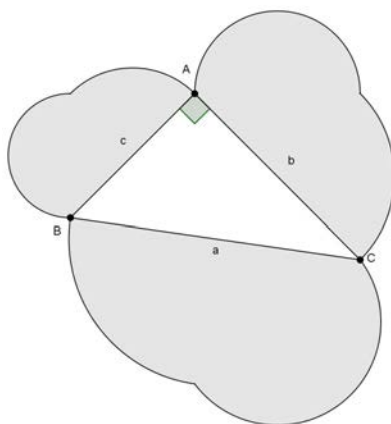


Figura 4.13: Generalização: Teorema de Pitágoras

Proposição 4.3. *A área A de uma figura construída sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas B e C de figuras semelhantes construídas sobre os catetos.*

Demonstração. Sejam então A , B e C as áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura 4.13. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança pelo lema 4.3.

Então,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} \quad (4.10)$$

Da equação 4.10:

$$\frac{C}{c^2} = \frac{B}{b^2} \Rightarrow C = \frac{Bc^2}{b^2} \quad (4.11)$$

Ainda pela equação 4.10

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} \Rightarrow A = \frac{Ba^2}{b^2} \quad (4.12)$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ pelo teorema 4.1 mais a equação 4.12, então:

$$A = \frac{Ba^2}{b^2} = \frac{B(b^2 + c^2)}{b^2} = B + \frac{Bc^2}{b^2}$$

Substituindo pela igualdade da equação 4.10

$$A = B + C$$

□

4.10 Demonstração de Polya: Prova do Teorema de Pitágoras e generalização

George Polya (1887-1985), matemático húngaro e conferencista em várias universidades, principalmente na Universidade de Stanford, Estados Unidos, demonstra o Teorema de Pitágoras e generaliza com um raciocínio notável, segundo Barbosa (1993).

Demonstração. (Polya) Consideremos dois triângulos retângulos congruentes de hipotenusa a e catetos b e c .

Com os lados do primeiro triângulo construímos os quadrados Q_a , Q_b e Q_c . Com os lados do segundo triângulo construímos os polígonos semelhantes P_a , P_b e P_c , tendo como lados homólogos justamente a , b e c , conforme Figura 4.14.

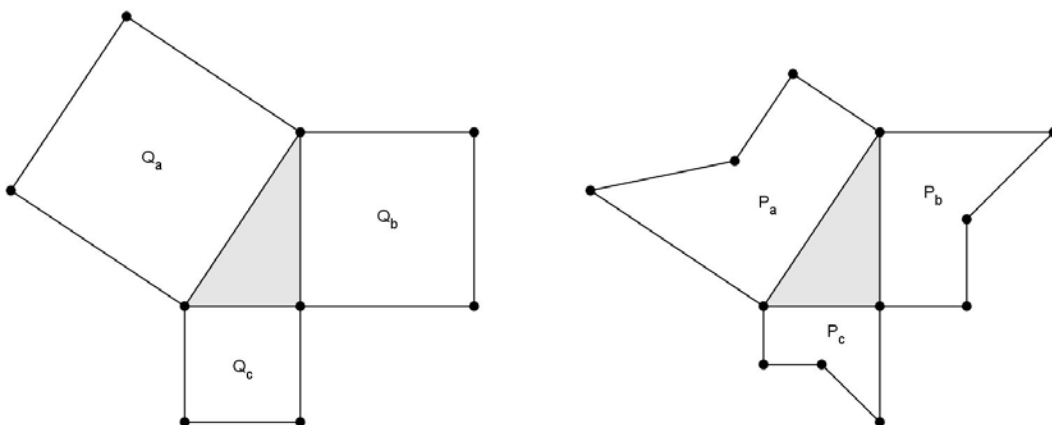


Figura 4.14: Polya: Polígonos

Observamos que na Figura 4.14 temos polígonos semelhantes e com os lados dos triângulos homólogos

Pelo lema 4.3

$$\frac{P_a}{Q_a} = \frac{P_b}{Q_b} = \frac{P_c}{Q_c} = k$$

Indicamos por k o valor das razões das medidas das áreas, temos

$$P_a = kQ_a, P_b = kQ_b \text{ e } P_c = kQ_c$$

Destas relações resultam as equações:

$$Q_a = Q_b + Q_c \tag{4.13}$$

$$P_a = P_b + P_c \quad (4.14)$$

São algebricamente equivalentes, ou seja, se provar uma delas, a outra é imediatamente verdadeira.

Uma figura conveniente é obtida no próprio triângulo retângulo ABC , basta observar na figura 4.15 que a altura \overline{AH} relativa a hipotenusa \overline{BC} decompõe o triângulo retângulo em dois triângulos retângulos semelhantes entre si, BHA e AHC , e o próprio ABC .

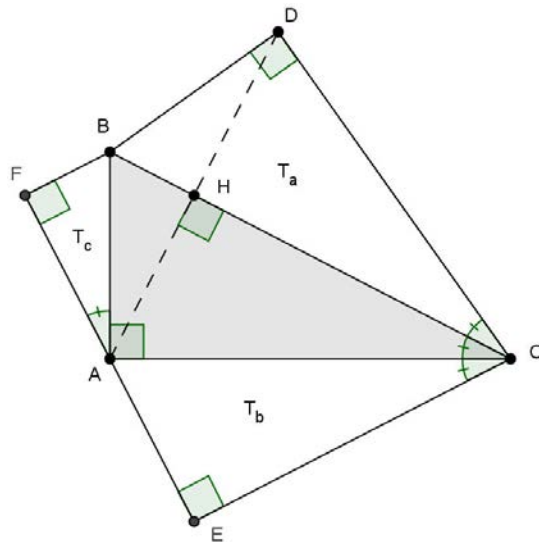


Figura 4.15: Polya: Triângulo conveniente.

Seja o triângulo BDC tal que $BDC \equiv ABC$. Pela proposição 3.1, temos: $AEC \equiv AHC$ e $FAB \equiv HAB$.

Logo, $T_a = T_b + T_c$.

Concluimos que são verdadeiras as equação 4.13 (Teorema de Pitágoras) e a equação 4.14 (Generalização do Teorema).

□

4.11 Aplicações do Teorema

Muitas são as aplicações do Teorema de Pitágoras, encontradas em Muniz (2014) e (DOLCE; POMPEO 1993).

4.11.1 Diagonal de um quadrado

O quadrado é um quadrilátero regular, ou seja, uma figura geométrica com quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos. Calcular a diagonal de um quadrado ou de um retângulo é uma tarefa útil que pode ser necessária em muitas situações da vida real.

Corolário 4.3. *As diagonais de um quadrado de lado com medida igual a l medem $l\sqrt{2}$.*

Demonstração. Se $ABCD$ é um quadrado de lado com medida l e com diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , conforme a figura 4.16, então o triângulo ABC é retângulo em \widehat{B} e isósceles $\overline{AB} = \overline{BC} = l$. Portanto,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = l^2 + l^2 \text{ Proposição 4.1,}$$

ou simplesmente,

$$\overline{AC} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

Análogo para \overline{BD} . □

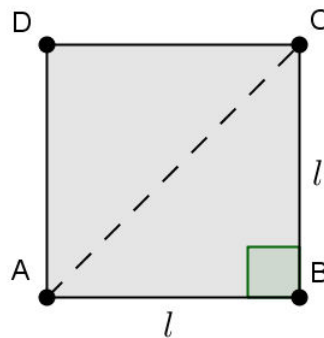


Figura 4.16: Diagonal do Quadrado

Corolário 4.4. *As diagonais de um retângulo de lados com medidas iguais a a e b medem $\sqrt{a^2 + b^2}$.*

Demonstração. Se $ABCD$ é um retângulo de lados com medidas a e b , e com diagonal $\overline{AC} = d$.

Decorre imediatamente do Teorema 4.1 que $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Análogo para outra diagonal. □

4.11.2 Altura do triângulo equilátero

Triângulo equilátero é todo triângulo em que os três lados possuem medidas iguais, triângulos equiláteros também são equiangulares, isto é, todos os três ângulos internos são congruentes entre si e medem 60° .

Corolário 4.5. *As alturas de um triângulo equilátero de lado com medida l medem $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.*

Demonstração. Se ABC é um triângulo equilátero de lados com medida l , medida h da altura \overline{DC} relativa ao lado \overline{AB} e $D \in \overline{AB}$, conforme Figura 4.17. Então o triângulo ADC é retângulo em \widehat{D} .

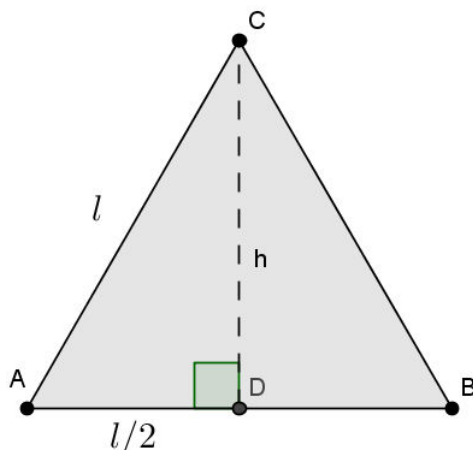


Figura 4.17: Altura do triângulo equilátero.

Pelo Teorema 4.1 no triângulo ADC

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Concluimos que

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

As demais alturas são análogas. □

4.11.3 Diagonal de um bloco retangular

O paralelepípedo retângulo (ou simplesmente um bloco retangular) é um poliedro formado por 6 retângulos.

Corolário 4.6. *A medida d da diagonal de um bloco retangular cujas arestas medem a , b , c é igual*

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Demonstração. Se $ABCDEFGH$ é um bloco retangular de arestas $\overline{EH} = \overline{FG} = \overline{AD} = \overline{BC} = a$, $\overline{AB} = \overline{EF} = \overline{DC} = \overline{HG} = b$ e $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{DH} = \overline{CG} = c$, e a medida da diagonal do bloco $\overline{BH} = d_2$ conforme a Figura 4.18.

Pelo corolário 4.4 a diagonal d_1 do retângulo $EFGH$ mede $\sqrt{a^2 + b^2}$.

O triângulo BFH é retângulo em \hat{F} , pelo Teorema 4.1

$$\overline{BH}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{BF}^2 \Rightarrow d_2^2 = d_1^2 + \overline{BF}^2 = d_2^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + \overline{BF}^2$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

As demais diagonais são análogas. □

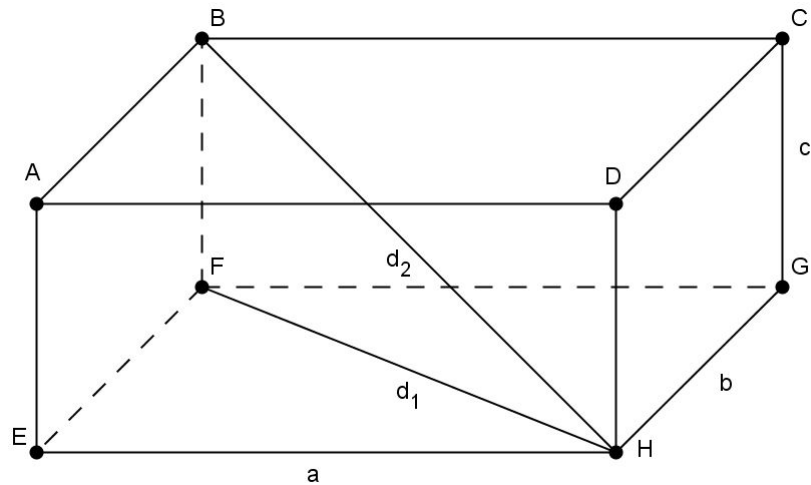


Figura 4.18: Diagonal do bloco retangular

4.11.4 Relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares

As relações entre os elementos de uma pirâmide regular decorrem diretamente do Teorema de Pitágoras, Figura 4.11.4

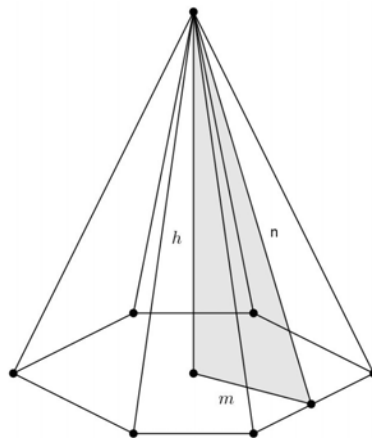


Figura 4.19: Relações na pirâmide

Corolário 4.7. *Em uma pirâmide regular o quadrado da medida n do apótema é igual a soma dos quadrados das medidas h da altura e m apótema da base.*

$$n^2 = h^2 + m^2$$

4.11.5 Relação entre altura, geratriz e raio do cone reto

As Relação entre altura, geratriz e raio do cone reto decorrem diretamente do teorema de Pitágoras, Figura 4.20.

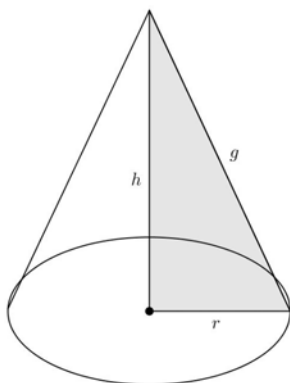


Figura 4.20: Relações no cone

Corolário 4.8. *Em um cone reto o quadrado da medida g da geratriz é igual a soma dos quadrados das medidas r do raio e h da altura.*

$$g^2 = r^2 + h^2$$

4.11.6 Módulo de número complexo

Os números complexos são uma extensão do conjunto dos números reais. Podemos representar geometricamente esse número como na Figura 4.21 e o segmento de reta \overline{OP} é chamado de módulo do número complexo e decorre diretamente do Teorema de Pitágoras.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

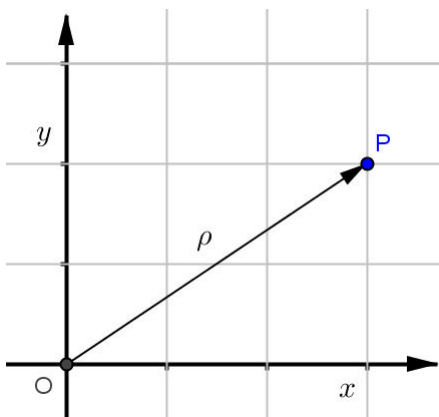


Figura 4.21: Módulo de número complexo

4.11.7 Razões Trigonômétricas

O Teorema de Pitágoras é fundamental para determinar as razões seno e cosseno de ângulos notáveis como 30° , 45° e 60° .

A relação fundamental trigonométrica $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ é decorrência direta do Teorema de Pitágoras.

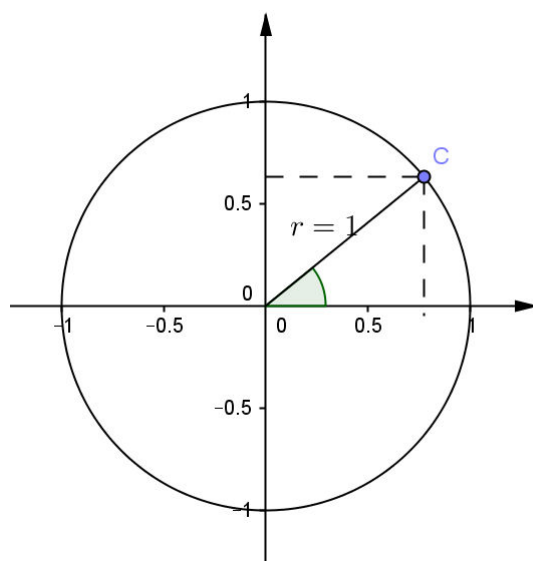


Figura 4.22: Círculo trigonométrico

5 Objetos de Aprendizagem

Neste capítulo será abordado os conceitos, as características, as formas de interatividade e a construção de um Objeto de Aprendizagem. Para isso utilizaremos como referência os livros: *Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico* do Ministério da Educação (MEC) de 2007; *Linux Educacional: Módulo 4 Objetos de aprendizagem* do Ministério da Educação (MEC) de 2015.

5.1 Definição de Objetos de Aprendizagem

As pesquisas sobre Objetos de Aprendizagem (OA) são recentes, dessa maneira ainda não dispomos de um padrão ou consenso universalmente aceito sobre sua definição. Os OA podem ser desenvolvidos em qualquer mídia ou formato, podendo ser simples como uma animação ou complexo como uma aplicação computacional, MEC (2007, p. 20).

Entretanto, pelo livro *Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico* do Ministério da Educação (MEC) de 2007, que reúne uma coletânea de artigos sobre os Objetos de Aprendizagem, ou Learning Objects, estes podem ser compreendidos como recursos reutilizáveis de apoio à aprendizagem. Normalmente são arquivos multimídia e interativos com base educacional, que devem ser organizados e catalogados para promover uma eventual reutilização. Os OA podem conter imagens, animações e applets¹, documentos VRML (realidade virtual), arquivos de texto ou hipertexto, dentre outros.

Há diversos fatores que justificam a utilização dos OA na área educacional, como a flexibilidade, a facilidade para atualização, a customização, a interoperabilidade², o aumento do valor de um conhecimento e a facilidade de indexação e procura, MEC (2007, p. 60).

¹Applet é um pequeno software que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior (como por exemplo um web browser), geralmente como um Plugin. O termo foi introduzido pelo AppleScript em 1993.

²Interoperabilidade: capacidade de um sistema de se comunicar de forma transparente com outro sistema. Na área da tecnologia de informação a interoperabilidade é a troca de informações e/ou dados através de computadores.

5.2 Características dos Objetos de Aprendizagem

Na literatura é possível encontrar diferentes denominações para os objetos de aprendizagem, tais como: objetos educacionais, objetos de conhecimento, componentes de software educacional, conteúdos de objetos compartilháveis, objetos de aprendizagem multimídia, entre outros. Porém, todos eles compartilham da mesma característica: a capacidade de reutilização. Sua estruturação viabiliza a manutenção e adaptação do conteúdo, possibilitando uma melhor utilização por parte dos desenvolvedores, MEC (2015).

Os OA surgiram como forma de organizar e estruturar materiais educacionais digitais tendo em vista sua reusabilidade. A reusabilidade pressupõe também a existência de um sistema de catalogação de OA com vistas a assegurar acessibilidade, pela possibilidade de acessar recursos educacionais em um local remoto e usá-los em muitos outros locais, MEC (2007, p. 82).

OA são mais eficientemente aproveitados quando organizados, catalogados e armazenados em um repositório³ integrável a um sistema de gerenciamento de aprendizagem e é desejável a adoção de *padrões abertos*⁴ para nortear o desenvolvimento do projeto. Pois, padrões abertos favorecem as atualizações e reutilizações, vencendo assim a obsolescência ou a desatualização.

Devido ao atual grau de desenvolvimento tecnológico e popularização da internet, os programas já possuem estruturas apropriadas para aplicações de Web⁵. Na realidade, são criados voltados especificamente para atender a essa demanda. Assim como os programas, os OA também já incorporam algumas dessas características. Quando falamos nas melhorias possibilitadas pelos novos recursos e novas mídias, estamos falando do uso do Java⁶ e do Flash⁷ como programas mais adequados para aplicações digitais e de internet, MEC (2007, p. 74).

5.3 Objeto de Aprendizagem Pitágoras

Pitágoras é o nome do OA desenvolvido por Valci Rodrigues Balbino Junior como parte da dissertação de mestrado do programa PROFMAT da Unesp de Rio Claro.

³Repositórios de Objetos de Aprendizagem são como depósitos virtuais onde ficam armazenados os materiais com fins educacionais. Também podem ser entendidos como banco de dados.

⁴Para que um produto de software seja considerado como um Padrão Aberto este deve atender a quatro fatores: Disponibilidade; Não possuir discriminação; Extensibilidade; Sem Royalties.

⁵A World Wide Web, ou simplesmente Web, é um sistema de documentos em hipermídia (hipermídia) que são interligados e executados na Internet.

⁶Java é uma linguagem de programação orientada a objeto e desenvolvida pela Sun Microsystems na década de 90, que atualmente, pertence a Oracle.

⁷Flash: Originalmente desenvolvido pela Macromedia e hoje pertencente à Adobe, o Flash é uma plataforma multimídia de desenvolvimento de aplicações que contenham animações, áudio e vídeo, bastante utilizada na construção de anúncios publicitários e páginas web interativas.

Disponível: <http://sicalis.com.br/pitagoras/>

5.3.1 Objetivo e considerações

O *Objeto de Aprendizagem Pitágoras*, aborda os conceitos matemáticos relacionados ao Teorema de Pitágoras, e tem o objetivo de contextualizar o ensino de matemática de maneira a permitir que o estudante crie um elo entre as demonstrações, a história da matemática e a geometria da escola (ensino básico). Considerando o currículo do Estado de São Paulo, o ensino regular prevê a aprendizagem do Teorema de Pitágoras no 9º ano do Ensino Fundamental, conseqüentemente o *Objeto de Aprendizagem Pitágoras* destina-se à estes estudantes, São Paulo (2012).

A linguagem de programação foi definida considerando as várias publicações de OA no formato Flash em repositórios de OA como: RIVED (2014) (<http://rived.mec.gov.br/>) e PROATIVA (2014) (<http://www.proativa.vdl.ufc.br/>). Então, o ActionScript, linguagem de programação da plataforma de desenvolvimento do Adobe Flash, foi considerada padrão para o desenvolvimento. O arquivo de projeto chama-se *pitagoras fla*.

O programa pode ser compreendido em seis módulos: Carregamento; Pergunta Inicial; Menu; Aspectos Históricos; Demonstrações; Quebra-cabeça.



Figura 5.1: Fluxograma do Programa.

Para organizar o documento conforme a temática, é melhor usar cenas separadas para uma introdução, uma mensagem de carregamento, animações de demonstrações, jogos e créditos. Ao usar as cenas não há a necessidade de gerenciar um grande número de arquivos FLA, porque cada cena está contida em um único arquivo FLA.

Usar cenas é similar a usar vários arquivos FLA para criar uma apresentação maior. Cada cena tem uma linha do tempo. Os quadros no documento são numerados consecutivamente pelas cenas. As cenas são reproduzidas no documento, na ordem em que são listadas no painel Cena. Quando o indicador de reprodução alcança o quadro final de uma cena, ele passa para a próxima cena. Entretanto, o programa pode gerenciar um desvio do fluxo das cenas pelo ActionScript. Encontra-se no apêndice as referidas funções e comandos.

5.3.2 Interface

Uma interface⁸ bem elaborada permite ao usuário utilizá-la com facilidade, e é um grande desafio conciliar usabilidade e design. Para tanto, é necessário fazer com que ela seja a mais compreensível possível, e adequada ao público-alvo, devendo-se evitar uma sobrecarga de informações, MEC (2007, p. 41).

A interface tem um estilo cartoon com plano de fundo branco e possui elementos gráficos da Grécia antiga. Na *Tela de abertura* o desenho de uma coluna grega aumenta de tamanho conforme o arquivo carrega no computador, atingindo 100% no marcador de progresso, conforme Figura 5.2.



Figura 5.2: Carregamento e abertura

O estudante não pode iniciar sua atividade até que o arquivo (pitagoras.swf) esteja totalmente carregado.

A tela *Pergunta inicial* (Figura 5.3) exibe a animação de uma caricatura grega que pede um comando do estudante através de uma pergunta: "Olá! Você quer saber um pouco mais sobre Pitágoras?". Existem duas opções de comando:

1. SIM - Apresenta animação sobre *Aspectos históricos*.
2. NÃO - Redireciona para a tela *Menu principal*.

⁸Interface: elemento que proporciona uma ligação física ou lógica entre dois sistemas ou partes de um sistema que não poderiam ser conectados diretamente.

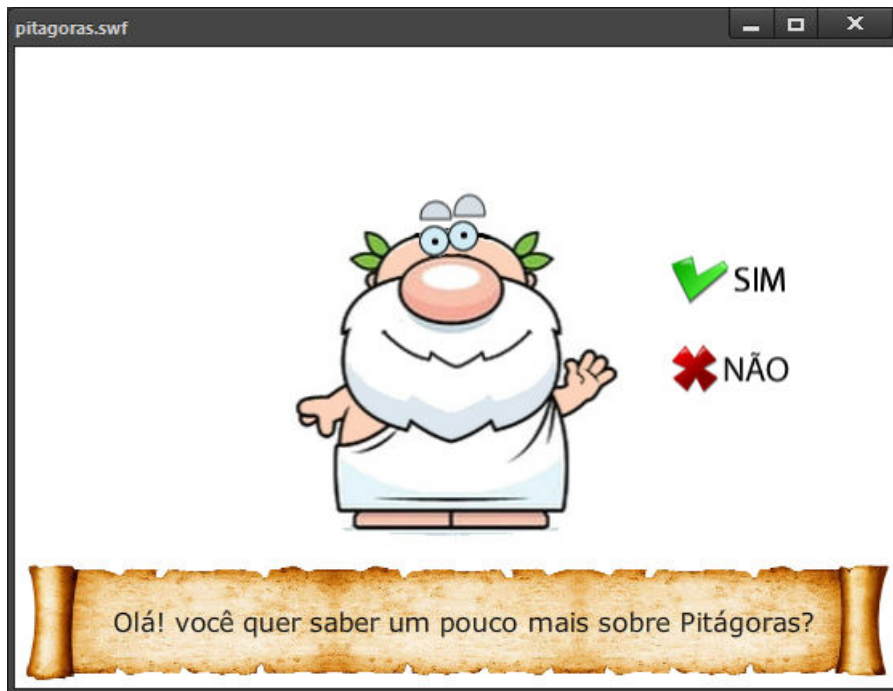


Figura 5.3: Pergunta inicial

O Objeto de Aprendizagem Pitágoras é composto por um conjunto de interfaces que permitem a manipulação das animações e dos conceitos a serem abordados pelos estudantes. A qualquer momento o aluno pode acessar o menu principal (Figura 5.4) ou encerrar uma atividade. O menu acessa diretamente todos os módulos do programa.

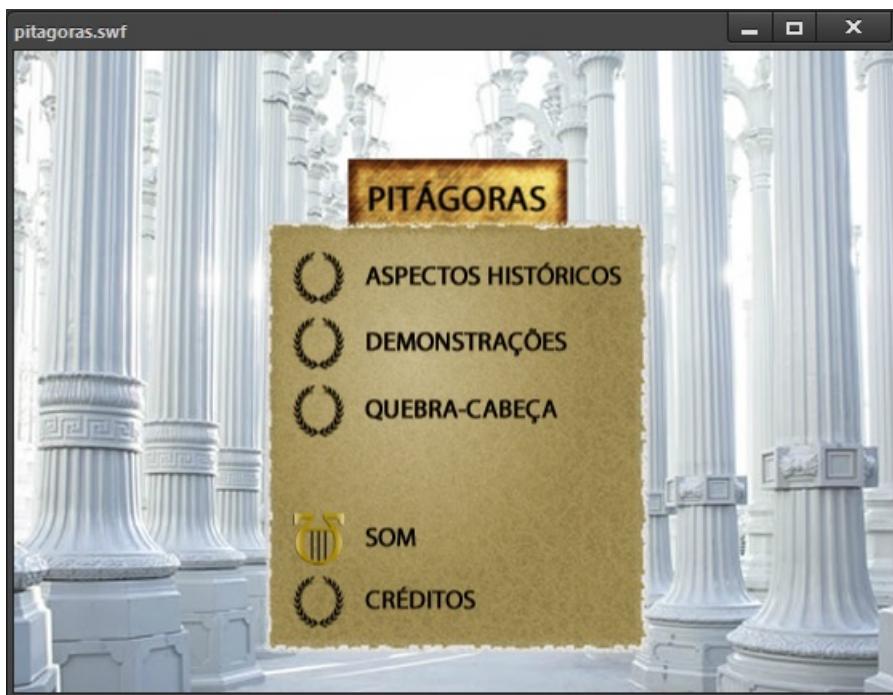


Figura 5.4: Menu Principal

Na animação *Aspectos históricos* outro personagem grego, agora representando o

próprio Pitágoras, conduz o estudante numa apresentação que contempla: Aspectos históricos; Demonstrações; Exercícios resolvidos (Figura 5.5). Estão animadas as demonstrações por decomposição (4.7) e casos particulares (4.2). A qualquer momento o estudante pode inserir comandos: Parar; Voltar; Avançar; Retroceder; Prosseguir.

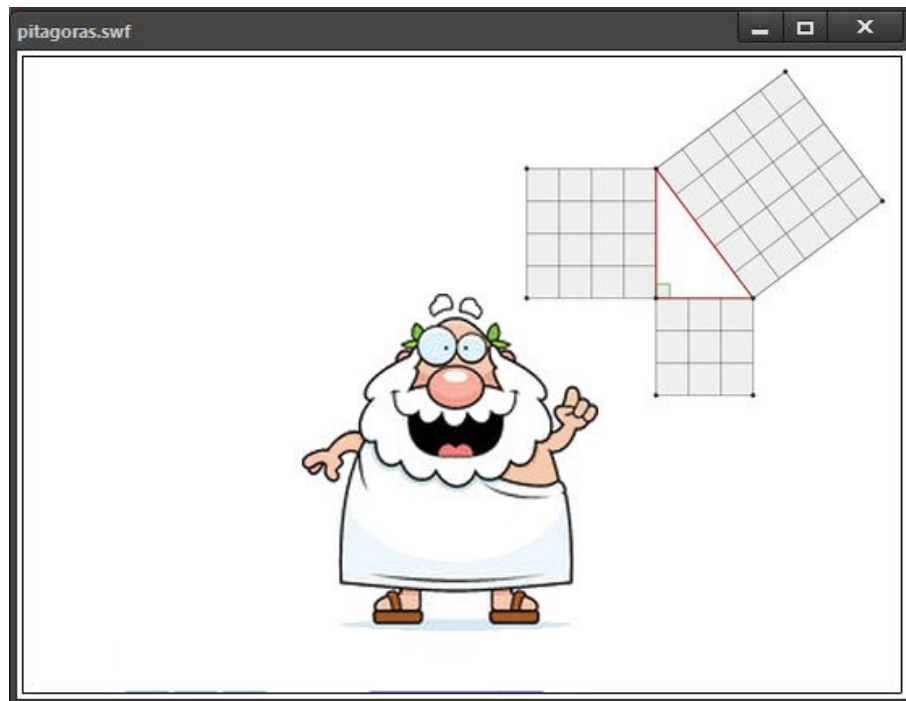


Figura 5.5: História de Pitágoras

As imagens e a música de fundo são livres de direitos autorais e podem ser encontradas em repositórios especializados. A música de fundo do Objeto de Aprendizagem Pitágoras chama-se Mmm Mmm Muzak de Brian Allen Holmes e está disponível no site NewGrounds (<http://www.newgrounds.com>), para aplicativos baseados na internet essa música é livre. As imagens do OA foram retiradas do site Pixabay (<https://pixabay.com>) e são livres. As imagens são liberadas sob a licença: Creative Commons CC0 (domínio público).

5.3.3 Quebra-cabeça Decomposição

O estudante é desafiado a resolver um quebra-cabeça (Figura 5.6), movendo e rotacionando as peças, tentando transportar a área da figura do quadrado maior para as áreas ocupadas pelos dois quadrados menores.

A linha do planejamento segue modelo proposto pelo documento *Linux Educacional: Objetos de Aprendizagens*, MEC (2015). Então, deve-se considerar: Definição dos objetivos e temáticas; Relevância do tema, o tipo de problema a ser resolvido; Definição da infraestrutura tecnológica que será utilizada; Organização das atividades e interações de todos os elementos numa sequência didática para a aprendizagem.



Figura 5.6: Quebra-cabeça 1.

O OA propõe aos estudantes novos desafios a cada resolução, Figura 5.7. Nessa proposta de atividade, o estudante deverá ao final ser capaz de perceber a relação de Pitágoras na decomposição de figuras, conhecer aspectos históricos e entender as demonstrações proposta pelo OA.

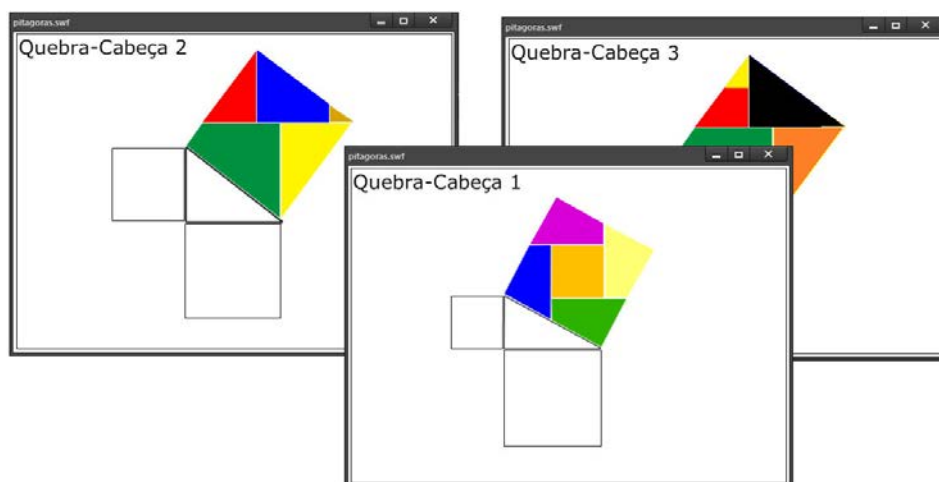


Figura 5.7: Quebra-cabeça

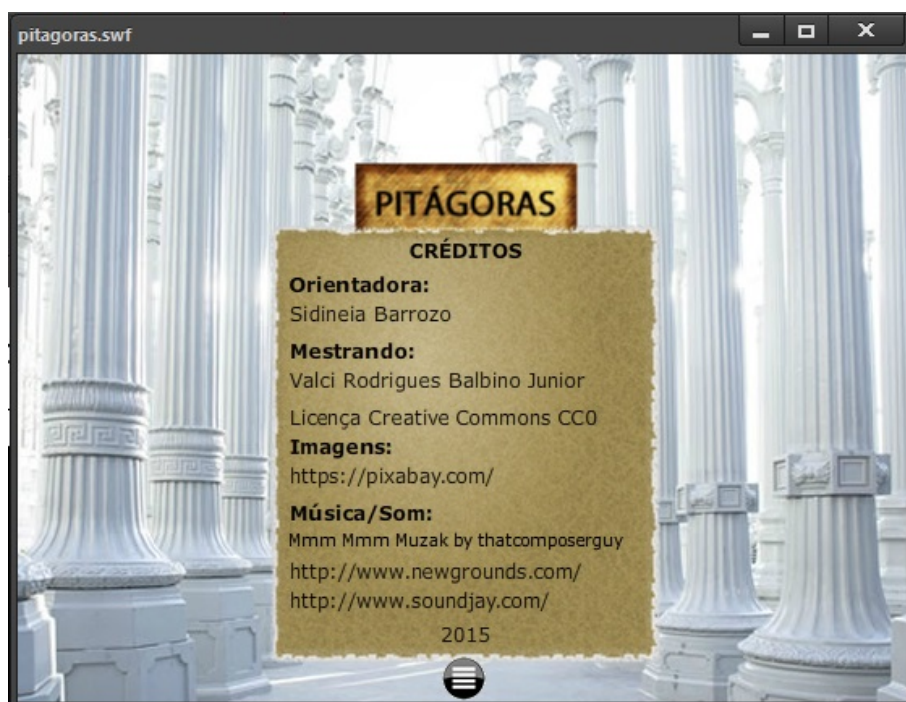


Figura 5.8: Créditos

6 Conclusão

O Teorema de Pitágoras é uma ferramenta muito importante na resolução de inúmeros problemas não só na geometria, mas também em várias outras áreas da matemática e de outras ciências. A importância a que se tem dado ao seu estudo, talvez, não exprima em sua totalidade tamanha grandeza e, muito menos a pouca contextualização histórica o valorize da maneira ideal. Ao professor de matemática cabe sempre estimular a curiosidade dos estudantes, para que possam seguir em frente com suas próprias descobertas, contemplando as grandes realizações do passado.

Os Objetos de Aprendizagem podem ser aplicado ao teorema, trazem novas possibilidades no desenvolvimento de materiais, e desempenham um papel facilitador de conteúdo didático, motivador e interativo. A reutilização torna mais fácil a atualização do conteúdo, reduzindo tempo, testes, documentação e manutenção. Novos projetos podem basear-se no Objeto de Aprendizagem Pitágoras, conseqüentemente poderemos ampliar seus recursos e criar novas possibilidades ou novas aplicações.

Os pitagóricos revolucionaram a matemática, atribuindo sentido, deixando de ser uma matéria empírica, mas também filosófica, passando a ser vista como uma ciência que visa estudar a natureza em seus aspectos mais gerais e fundamentais. Pois ao se pensar em qualquer coisa, pensa-se em números, não apenas em números naturais, mas numa expansão dos naturais.

O problema da incomensurabilidade serviu não apenas para ampliar o conjunto numérico, mas aumentou qualitativamente as demais áreas do conhecimento, conseqüentemente melhorou o mundo. De certa forma os pitagóricos estavam certos, talvez realmente, todas as coisas sejam números.

Referências

- [1] ADOBE. *Ajuda do Flash Professional*. 2015. Acessado: junho de 2015. Disponível em: <<https://helpx.adobe.com/br/flash/using/flash-documents.html>>.
- [2] BARBOSA, R. M. *Descobrimo padrões Pitagóricos: geométricos e numéricos*. 1. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [3] BOYER, C. B. *História da matemática*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher - Universidade de São Paulo, 1974.
- [4] DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática - Volume 4*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012.
- [5] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana - Volume 9*. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [6] EVES, H. *Introdução à História da matemática*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- [7] FALABRETTI, E.; OLIVEIRA, J. *Filosofia: O Livro das Perguntas*. 1. ed. Curitiba: IESDE, 2011.
- [8] GASPAR, M. T. J. O teorema de Pitágoras na antiguidade: Um olhar sobre a história da matemática indiana. *RPM*, v. 87, p. 2–8, 2015.
- [9] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [10] MEC. *Linux Educacional*. 2015. Acessado: maio de 2015. Disponível em: <<http://linuxeducacional.c3sl.ufpr.br/>>.
- [11] MEC. *Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico*. 1. ed. Brasília: MEC SEED, 2007.
- [12] MEC. *RIVED*. 2004. Acessado: outubro de 2014. Disponível em: <<http://rived.mec.gov.br/>>.
- [13] MOL, R. S. *Introdução à História da matemática*. 1. ed. Belo Horizonte: CAED UFMG, 2013.

- [14] MUNIZ, A. C. N. *Geometria: Coleção PROFMAT*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [15] ROBSON, E. *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*. 2001. Acessado: maio de 2015. Disponível em: <<http://www.hps.cam.ac.uk/people/robson/neither-sherlock.pdf>>.
- [16] ROQUE, T. *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. 1. ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.
- [17] UFC. *PROATIVA*. 2014. Acessado: outubro de 2014. Disponível em: <<http://www.proativa.vdl.ufc.br/>>.
- [18] WAGNER, E. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

A Apêndice: Código fonte do Programa

Editor: Adobe Flash Professional CC 2015

Arquivo: pitagoras fla pitagoras.swf

Player: Flash Player 17 **Script:** ActionScript 3.0

Dimensões: 550x400 px **Frames:** 17 FPS

Cena 1

Actions: Quadro 1

```
// Registro de evento inicial
this.addEventListener(Event.ENTER_FRAME, loading);
// Função Loading
function loading(e:Event):void {
var total:Number = this.stage.loaderInfo.bytesTotal;
var loaded:Number = this.stage.loaderInfo.bytesLoaded;
bar_mc.scaleX = loaded/total;
loader_txt.text = Math.floor((loaded/total)*100)+ "%";
if (total == loaded) {
play();
this.removeEventListener(Event.ENTER_FRAME, loading);
}
}
// Música de fundo
var mySound:Sound = new Sound();
var myChannel:SoundChannel = new SoundChannel();
var myVolume = 3;
mySound.load(new URLRequest("Elevator_love.mp3"));
myChannel = mySound.play(0, 9999);
```

```
// Função do Botão next global
//btn_next.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_next);
function click_next(event:MouseEvent):void {
    play();
}
// Função do Botão Menu global
function click_menu(event:MouseEvent):void {
    gotoAndPlay(1,"Menu");
}
```

Actions: Quadro 19

```
gotoAndPlay(1, "Cena 2");
```

Cena 2

Actions: Quadro 36

```
// Botão SIM (Quero saber mais sobre Pitágoras)
btn_SIM.addEventListener(MouseEvent.CLICK, clickS);
function clickS(event:MouseEvent):void {
// Redireciona para História
    gotoAndPlay(1,"Historia");
}
// Botão NAO (Não quero saber)
btn_NAO.addEventListener(MouseEvent.CLICK, clickN);
function clickN(event:MouseEvent):void {
// Redireciona para Menu
    gotoAndPlay(1,"Menu");
}
```

Actions: Quadro 60

```
gotoAndPlay(36, "Cena 2");
```

Menu

Actions: Quadro 17

```
// Parar Animação
stop();
// Botão/Função Aspectos Históricos
btn_aspectos_historicos.addEventListener(MouseEvent.CLICK,
click_aspectos_historicos);
// Função
function click_aspectos_historicos(event:MouseEvent):void {
    gotoAndPlay(1,"Historia");
}
// Botão/Função Demonstração
btn_demonstracoes.addEventListener(MouseEvent.CLICK,
click_demonstracoes);
// Função
function click_demonstracoes(event:MouseEvent):void {
    gotoAndPlay(1,"Demonstracao");
}
// Botão/Função Quebra-cabeça
btn_quebra_cabeca.addEventListener(MouseEvent.CLICK,
click_quebra_cabeca);
// Função
function click_quebra_cabeca(event:MouseEvent):void {
    gotoAndPlay(1,"Jogo 1");
}
// Botão/Função Créditos
btn_credits.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_credits);
// Função
function click_credits(event:MouseEvent):void {
    gotoAndPlay(36,"Menu");
}
// Botão/Função Som
btn_som.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_som);
// Função
function click_som(event:MouseEvent):void {
myVolume = myVolume+1;
if(myVolume>3){
```

```
myVolume=0;
}
if(myVolume == 3){
SoundMixer.soundTransform = new SoundTransform(1, -1);
}
if(myVolume == 2){
SoundMixer.soundTransform = new SoundTransform(0.7, -0.7);
}
if(myVolume == 1){
SoundMixer.soundTransform = new SoundTransform(0.3, -0.3);
}
if(myVolume == 0){
SoundMixer.soundTransform = new SoundTransform(0, 0);
}
}
```

Actions: Quadro 36

```
// Parar Animação
stop();
// Botão Menu
btn_menu.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_menu);
```

Historia

Actions: Quadro 1

```
// Parar Animação
stop();
// Botão Menu
btn_menu.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_menu);
// Botão/Função PLAY
btn_play.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_play);
// Função
function click_play(event:MouseEvent):void {
    play();
}
// Botão/Função STOP
```

```
btn_stop.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_stop);
// Função
function click_stop(event:MouseEvent):void {
    stop();
}
```

Actions: Quadro 36

```
// Parar Animação
stop();
```

Actions: Quadro 37

```
// Parar Animação
stop();
```

Actions: Quadro 74

```
// Parar Animação
stop();
```

Jogo 1

Actions: Quadro 1

```
// Botão Menu
```

```
btn_menu.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_menu);
```

```
// Função Avaliar Vencedor
```

```
function vencedor():void{
    if(
        (p11.x == 223.90) && (p11.y == 290.70) &&
        (p12.x == 256.95) && (p12.y == 229.45) &&
        (p13.x == 127.95) && (p13.y == 163.45) &&
        (p14.x == 194.45) && (p14.y == 258) &&
        (p15.x == 194.45) && (p15.y == 229.50) ){
        prb.visible=true;
```

```
}
else{
prb.visible=false;
}
}
vencedor();

Actions: 41

// Parar Animação
stop();
// Botão next
btn_next.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_next);

Actions: 77

// Parar Animação
stop();
///// Peça 1 Movimento /////
p11.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_DOWN , movePeca);
stage.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_UP , movePeca);
function movePeca(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "mouseDown" :
            p11.startDrag();
            break;
        case "mouseUp" :
            p11.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p11.x > 213) && (p11.x < 233) && (p11.y < 301) &&
(p11.y > 280)){
p11.x = 223.90;
p11.y = 290.70;
}
                break;
    }
    // Avaliar vencedor
vencedor();
}
///// Peça 2 Movimento /////
```

```
p12.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca2);
stage.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca2);
function movePeca2(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "click" :
            p12.startDrag();
            break;
        case "click" :
            p12.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p12.x > 246) && (p12.x < 266) && (p12.y < 240) &&
(p12.y > 220)){
                p12.x = 256.95;
                p12.y = 229.45;
            }
            break;
    }
    // Avaliar Vencedor
    vencedor();
}

///// Peça 3 Movimento /////
p13.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca3);
stage.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca3);
function movePeca3(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "click" :
            p13.startDrag();
            break;
        case "click" :
            p13.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p13.x > 117) && (p13.x < 137) && (p13.y < 173) &&
(p13.y > 153)){
                p13.x = 127.95;
                p13.y = 163.45;
            }
            break;
    }
    // Avaliar Vencedor
```

```
vencedor();
}
///// Peça 4 Movimento /////
p14.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca4);
stage.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca4);
function movePeca4(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "click" :
            p14.startDrag();
            break;
        case "click" :
            p14.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p14.x > 184) && (p14.x < 205) && (p14.y < 268) &&
(p14.y > 248)){
                p14.x = 194.45;
                p14.y = 258;
            }
            break;
    }
    // Avaliar Vencedor
    vencedor();
}
///// Peça 5 Movimento /////
p15.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca5);
stage.addEventListener(MouseEvent.CLICK , movePeca5);
function movePeca5(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "click" :
            p15.startDrag();
            break;
        case "click" :
            p15.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p15.x > 184) && (p15.x < 204) && (p15.y < 240) &&
(p15.y > 219)){
                p15.x = 194.45;
                p15.y = 229.50;
            }
            break;
    }
}
```

```
    }
    // Avaliar Vencedor
vencedor();
}
// Avaliar Vencedor
vencedor();

Actions: 78

// Fim de Jogo (próximo quebra-cabeça)
gotoAndPlay(1,"Jogo 1");

Jogo 2

Actions: 1

// Parar Animação
stop();
///// Peça 1 Movimento /////
//
// Rotacionar peças - Click duplo
p21.doubleClickEnabled = true;
p21.addEventListener(MouseEvent.DOUBLE_CLICK, rot21);
// Função rotacionar 45°
function rot21(e:MouseEvent):void {
    p21.rotation = p21.rotation+45;
}
// mover peças
p21.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_DOWN , movePeca21);
stage.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_UP , movePeca21);
// Função
function movePeca21(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "mouseDown" :
            p21.startDrag();
            break;
        case "mouseUp" :
            p21.stopDrag();
    }
    // Ajustar Peça
```

```
        if((p21.x > 136) && (p21.x < 156) && (p21.y < 156) &&
(p21.y > 136)){
p21.x = 146.45;
p21.y = 146.45;
}
        break;
    }
    // Avaliar Vencedor
vencedor2();
}
///// Peça 2 Movimento /////
// Rotacionar peças
p22.doubleClickEnabled = true;
p22.addEventListener(MouseEvent.DOUBLE_CLICK, rot22);
// Função
function rot22(e:MouseEvent):void {
    p22.rotation = p22.rotation+45;
}
// mover peças
p22.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_DOWN , movePeca22);
stage.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_UP , movePeca22);
function movePeca22(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "mouseDown" :
            p22.startDrag();
            break;
        case "mouseUp" :
            p22.stopDrag();
    }
    // Ajustar Peça
    if((p22.x > 202) && (p22.x < 222) && (p22.y < 154) &&
(p22.y > 134)){
p22.x = 212.95;
p22.y = 144.95;
}
        break;
    }
    // Avaliar Vencedor
vencedor2();
}
///// Peça 3 Movimento /////
```

```
// rotacionar peças
p23.doubleClickEnabled = true;
p23.addEventListener(MouseEvent.DOUBLE_CLICK, rot23);
// Função
function rot23(e:MouseEvent):void {
    p23.rotation = p23.rotation+45;
}
// mover peças
p23.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_DOWN , movePeca23);
stage.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_UP , movePeca23);
function movePeca23(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "mouseDown" :
            p23.startDrag();
            break;
        case "mouseUp" :
            p23.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p23.x > 205) && (p23.x < 225) && (p23.y < 346) &&
(p23.y > 326)){
p23.x = 215.45;
p23.y = 336.95;
}
            break;
    }
    // Avaliar Vencedor
vencedor2();
}
///// Peça 4 Movimento /////
// rotacionar peças
p24.doubleClickEnabled = true;
p24.addEventListener(MouseEvent.DOUBLE_CLICK, rot24);
// Função
function rot24(e:MouseEvent):void {
    p24.rotation = p24.rotation+45;
}
// mover peças
p24.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_DOWN , movePeca24);
stage.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_UP , movePeca24);
function movePeca24(event:MouseEvent):void {
```

```
switch (event.type) {
    case "mouseDown" :
        p24.startDrag();
        break;
    case "mouseUp" :
        p24.stopDrag();
        // Ajustar Peça
        if((p24.x > 205) && (p24.x < 225) && (p24.y < 249+117) &&
(p24.y > 229+117)){
p24.x = 215.95;
p24.y = 239.45+117;
}
            break;
}
    // Avaliar Vencedor
vencedor2();
}
///// Peça 5 Movimento /////
// rotacionar peças
p25.doubleClickEnabled = true;
p25.addEventListener(MouseEvent.DOUBLE_CLICK, rot25);
// Função
function rot25(e:MouseEvent):void {
    p25.rotation = p25.rotation+45;
}
// mover peças
p25.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_DOWN , movePeca25);
stage.addEventListener(MouseEvent.MOUSE_UP , movePeca25);
function movePeca25(event:MouseEvent):void {
    switch (event.type) {
        case "mouseDown" :
            p25.startDrag();
            break;
        case "mouseUp" :
            p25.stopDrag();
            // Ajustar Peça
            if((p25.x > 322) && (p25.x < 342) && (p25.y < 367) &&
(p25.y > 347)){
p25.x = 245.95+87;
p25.y = 239.45+118;
```

```
}
    break;
}
// Avaliar Vencedor
vencedor2();
}
// Função Avaliar Vencedor
function vencedor2():void{
if(
(p21.x == 146.45) && (p21.y == 146.45) &&
(p22.x == 212.95) && (p22.y == 144.95) &&
(p23.x == 215.45) && (p23.y == 336.95) &&
(p24.x == 215.95) && (p24.y == 239.45+117) &&
(p25.x == 245.95+87) && (p25.y == 239.45+118) ){
prb.visible=true;
}
else{
prb.visible=false;
}

// Não deixa peças sair da tela
if((p21.x < 0) || (p21.x > 550) || (p21.y < 0) || (p21.y > 400)){
p21.x=p21.y=100;
}
if((p22.x < 0) || (p22.x > 550) || (p22.y < 0) || (p22.y > 400)){
p22.x=p22.y=100;
}
if((p23.x < 0) || (p23.x > 550) || (p23.y < 0) || (p23.y > 400)){
p23.x=p23.y=100;
}
if((p24.x < 0) || (p24.x > 550) || (p24.y < 0) || (p24.y > 400)){
p24.x=p24.y=100;
}
if((p25.x < 0) || (p25.x > 550) || (p25.y < 0) || (p25.y > 400)){
p25.x=p25.y=100;
}
}
// Avaliar vencedor
vencedor2();
```

Actions: Quadro 7

```
gotoAndPlay(1,"Jogo 3");
```

Demonstracao

Actions: Quadro 1

```
// Parar Animação
```

```
stop();
```

```
// Botão Next
```

```
btn_next.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_next);
```

```
// Botão Menu
```

```
btn_menu.addEventListener(MouseEvent.CLICK, click_menu);
```

Actions: Quadro: 10

```
// Parar Animação
```

```
stop();
```

Actions: Quadro: 20

```
// Parar Animação
```

```
stop();
```

Actions: Quadro: 30

```
// Redirecionar
```

```
gotoAndPlay(1,"Jogo 1");
```